Лекція 11. Диференціальні операції в криволінійних координатах

Короткий зміст

Розділ 11.1. *Криволінійні ортогональні координати в просторі*

Розділ 11.2. *Диференціальні операції в сферичній та циліндричній системах координат*

11.2.1. Градієнт в ортогональних криволінійних координатах

11.2.2. Дивергенція в ортогональних криволінійних координатах

11.3.3. Оператор Лапласа в криволінійних координатах

11.3.4. Ротор в циліндричній та сферичній системах координат

Короткий зміст

У цій лекції:

— розглянуто криволінійні ортогональні координати в просторі, означено поняття коефіцієнтів Ламе, обчислено коефіцієнти Ламе для циліндричної та сферичної систем координат;

— розглянуто градієнт, дивергенцію та ротор в криволінійних координатах;

— наведено вигляд оператора Лапласа в циліндричній та сферичній системах координат.

11.1. Криволінійні ортогональні координати в просторі

Розглянемо в просторі $\mathbb{R}^3$ прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ і зв‘яжемо її з системою криволінійних координат $Ouvw$. Нехай між прямокутними координатами x, y, z та криволінійними координатами встановлено взаємно-однозначну відповідність, тобто

$$x = x(u,v,w),\ y = y(u,v,w),\ z = z(u,v,w); \tag{11.1}$$

$$u = u(x,y,z),\ v = v(x,y,z),\ w = w(x,y,z). \tag{11.2}$$

Рівняння $u = const$, $v = const$, $w = const$ є рівняннями координатних поверхонь криволінійної системи в декартовій системі координат. Кожна пара координатних поверхонь, що проходить через фіксовану точку утворює в перетині координатну лінію.

Розглянемо випадок криволінійної ортогональної системи координат, в довільній точці якої три координатні лінії, що проходять через цю точку ортогональні між собою.

Візьмемо точки $M\left(u;v;w\right)$ та $M_1\left(u+du;v;w\right)$ в просторі $Ouvw$ (рис. 11.1).

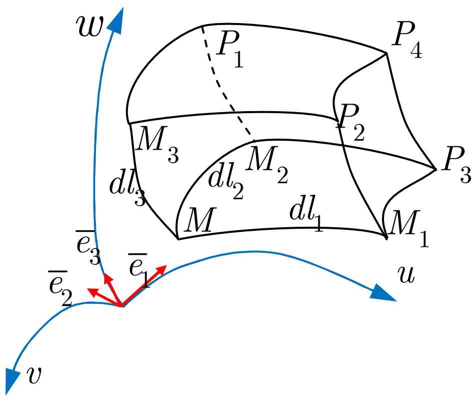

Рис.11.1

Довжина ребра MM_1 в цьому просторі дорівнює du. Враховуючи (11.1), точкам M та M_1 в просторі $Oxyz$ відповідають точки

$$N\left(x\left(u,v,w\right);y\left(u,v,w\right);z\left(u,v,w\right)\right)$$

та

$$N_1\left(x\left(u+du,v,w\right);y\left(u+du,v,w\right);z\left(u+du,v,w\right)\right)=$$
$$=\left(x+\frac{\partial x}{\partial u}du;\ y+\frac{\partial y}{\partial u}du;\ z+\frac{\partial z}{\partial u}du\right).$$

Звідси довжина dl_1 ребра NN_1 в просторі $Oxyz$

$$dl_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}\,du. \tag{11.3}$$

Отже, коли точка M зміщується в точку M_1 паралельно до осі Ou, образ NN_1 відрізку MM_1 в просторі $Oxyz$ має довжину (13.3).

Аналогічно, зміщуючи точку $M\left(u;v;w\right)$ в точку $M_2\left(u;v+dv;w\right)$ в просторі $Oxyz$ одержимо образ NN_2 ребра MM_2 довжина якого

$$dl_2=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}dv. \tag{11.4}$$

Якщо точка $M\left(u;v;w\right)$, рухаючись паралельно осі Ow переходить в точку $M_3\left(u;v;w+dw\right)$, то довжина відповідного образа NN_3 в просторі $Oxyz$ буде

$$dl_3=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2}dw. \tag{11.5}$$

Коефіцієнти

$$\begin{aligned}H_1&=\sqrt{\left(x'_u\right)^2+\left(y'_u\right)^2+\left(z'_u\right)^2};\\ H_2&=\sqrt{\left(x'_v\right)^2+\left(y'_v\right)^2+\left(z'_v\right)^2};\\ H_1&=\sqrt{\left(x'_w\right)^2+\left(y'_w\right)^2+\left(z'_w\right)^2}\end{aligned} \tag{11.6}$$

називають *коефіцієнтами Ламе*.

Таким чином, формули (11.3) – (11.5) можна записати у вигляді

$$dl_1=H_1du,\quad dl_2=H_2dv,\quad dl_3=H_3dw. \tag{11.7}$$

Враховуючи ортогональність системи координат площа грані $MM_2P_1M_3$ дорівнює $ds_1=dl_2dl_3=H_2H_3dvdw$. Аналогічно, площі граней $MM_1P_2M_3$ та $MM_1P_3M_2$ відповідно $ds_2=dl_1dl_3=H_1H_3dudw$, $ds_3=dl_1dl_2=H_1H_2dudv$. Об‘єм нескінченно малого паралелепіпеда, що розглядається

$$dV=dl_1dl_2dl_3=H_1H_2H_3dudvdw.$$

Знайдемо коефіцієнти Ламе в циліндричній та сферичній системах координат.

В циліндричній системі координат

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi,\\ z=z\end{cases}$$

покладаючи $u=\rho,\ v=\varphi,\ w=z$, з рівності (13.6) маємо:

$$H_1=1;\ H_2=\rho;\ H_1=1. \tag{11.8}$$

В сферичній системі координат

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = z\cos\theta \end{cases}$$

покладаючи $u = r$, $v = \theta$, $w = \varphi$, враховуючи формули (11.6) одержимо:

$$H_1 = 1;\ H_2 = r;\ H_1 = r\sin\theta. \tag{11.9}$$

11.2. Диференціальні операції в сферичній та циліндричній системах координат

11.2.1. Градієнт в ортогональних криволінійних координатах

Як відомо, похідна за напрямом скалярної функції $f = f\left(u,v,w\right)$ дорівнює проекції $\operatorname{grad} f$ на цей напрям:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = pr_{\vec{l}}\operatorname{grad} f\,.$$

Тому координати $\operatorname{grad} f$ в базисі $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$ дорівнюють похідним від f за напрямом цих векторів. Нехай $\Delta f = f\left(M_1\right) - f\left(M\right)$. Тоді

$$\left(\operatorname{grad} f, \vec{e}_1\right) = \lim_{\Delta l_1 \to 0}\frac{\Delta f}{\Delta l_1} = \lim_{\Delta l_1 \to 0}\frac{\Delta f}{H_1\Delta u} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial f}{\partial u}.$$

Аналогічно

$$\left(\operatorname{grad} f, \vec{e}_2\right) = \frac{1}{H_2}\frac{\partial f}{\partial v},\ \left(\operatorname{grad} f, \vec{e}_3\right) = \frac{1}{H_3}\frac{\partial f}{\partial w}.$$

Отже,

$$\operatorname{grad} f = \frac{1}{H_1}\frac{\partial f}{\partial u}\vec{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial f}{\partial v}\vec{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial f}{\partial w}\vec{e}_3. \tag{11.10}$$

В циліндричній системі координат $\vec{e}_1 = \vec{e}_\rho$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_3 = \vec{e}_z$. Тоді з рівності (11.10), враховуючи (11.8) маємо

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z. \tag{11.11}$$

В сферичній системі координат $\vec{e}_1 = \vec{e}_r$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_\theta$, $\vec{e}_3 = \vec{e}_\varphi$. Відповідно до формули (11.9), з рівності (13.10) одержуємо

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi. \tag{11.12}$$

11.2.2. Дивергенція в ортогональних криволінійних координатах

Нехай в системі координат $Ouvw$ задано векторне поле $\vec{a} = \left(P;Q;R\right) = P\vec{e}_1 + Q\vec{e}_2 + R\vec{e}_3$. За означенням,

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\Omega\to M}\frac{\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\left(\vec{a},\vec{n}^0\right)d\sigma}{V},$$

де V - об‘єм області Ω, Σ - поверхня, що її обмежує. За Ω візьмемо криволінійний паралелепіпед (рис.13.1) з об‘ємом $V = H_1H_2H_3dudvdw$. Обчислимо потік вектора $\vec{a}$ через дві грані, перпендикулярні до ребра MM_1. Зовнішня нормаль до грані $MM_2P_1M_3$ співпадає з вектором $-\vec{e}_1$. Отже, з точністю до нескінченно малих першого порядку відносно V потік вектора $\vec{a}$ через цю грань

$$\left(\vec{a},-\vec{e}_1\right)ds_1 = -PH_2H_3dvdw. \tag{11.13}$$

На протилежній грані $M_1P_3P_4P_2$ перша криволінійна координата дорівнює $u+du$. Отже, добуток PH_2H_3 на цій грані відрізняється від його значення на грані $MM_2P_1M_3$ на приріст $\frac{\partial}{\partial u}\left(PH_2H_3\right)du$. Напрям нормалі до грані $M_1P_3P_4P_2$ співпадає з напрямом $\vec{e}_1$. Тому потік вектора через цю грань дорівнює

$$\left(PH_2H_3+\frac{\partial}{\partial u}\left(PH_2H_3\right)du\right)dvdw. \tag{11.14}$$

Додаючи рівності (11.13) та (11.14), одержуємо, що потік вектора $\vec{a}$ через паралельні грані $MM_2P_1M_3$ та $M_1P_3P_4P_2$ дорівнює

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(PH_2H_3\right)dudvdw. \tag{11.15}$$

Для інших двох пар паралельних між собою граней, аналогічно одержуємо значення потоків вектора $\vec{a}$:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(QH_3H_1\right)dudvdw,\ \frac{\partial}{\partial w}\left(RH_1H_2\right)dudvdw. \tag{11.16}$$

Додавши (11.15) та (11.16) і поділивши на $V = H_1H_2H_3dudvdw$, одержимо формулу для дивергенції в криволінійних координатах:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial\left(PH_2H_3\right)}{\partial u}+\frac{\partial\left(QH_3H_1\right)}{\partial v}+\frac{\partial\left(RH_1H_2\right)}{\partial w}\right). \tag{11.17}$$

В циліндричній системі координат маємо

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho P\right)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial Q}{\partial\varphi}+\frac{\partial R}{\partial z}. \tag{11.18}$$

В сферичній системі координат з рівності (11.17), враховуючи (11.9) запишемо

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2P\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(Q\sin\theta\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial R}{\partial\varphi}. \tag{11.19}$$

11.2.3. Оператор Лапласа в криволінійних координатах

Оскільки

$$\Delta f = \operatorname{div}\operatorname{grad} f = \operatorname{div}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right)$$

і, згідно з рівностями (13.6), $dx = H_1 du,\ dy = H_2 dv,\ dz = H_3 dw$, то

$$\Delta f = \operatorname{div}\left(\frac{\partial f}{H_1\partial u}\vec{i} + \frac{\partial f}{H_2\partial v}\vec{j} + \frac{\partial f}{H_3\partial w}\vec{k}\right), \qquad (11.20)$$

Позначимо

$$P = \frac{1}{H_1}\frac{\partial f}{\partial u},\ Q = \frac{1}{H_2}\frac{\partial f}{\partial v},\ R = \frac{1}{H_3}\frac{\partial f}{\partial w}.$$

Тоді з рівностей (131.20) і (11.17) одержуємо вираз для оператора Лапласа в криволінійних координатах

$$\Delta f = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right). \qquad (11.21)$$

В циліндричній системі координат, згідно з рівностями (11.21) та (11.8), маємо

$$\Delta f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \qquad (11.22)$$

В частинному випадку, в полярних координатах (відсутня змінна z) з останньої рівності одержимо

$$\Delta f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}. \qquad (11.23)$$

В сферичній системі координат, використовуючи формули (11.21) та (11.9) оператор Лапласа матиме вигляд

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}. \qquad (11.24)$$

11.2.4. Ротор в циліндричній та сферичній системах координат

Запишемо без виведення формули для ротора векторного поля $\vec{a}$ в циліндричній та сферичній системах координат.

В циліндричній системі координат:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{\rho}\vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q\rho & R \end{vmatrix} = \tag{11.25}$$
$$= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial\varphi} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial\rho}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\left(\rho Q\right)}{\partial\rho} - \frac{\partial P}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_z.$$

В сферичній системі координат:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \frac{\vec{e}_r}{r^2\sin\theta} & \frac{\vec{e}_\theta}{r\sin\theta} & \frac{\vec{e}_\varphi}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ P & Qr & Rr\sin\theta \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial\left(R\sin\theta\right)}{\partial\theta} - \frac{\partial Q}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial P}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial\left(rR\right)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \tag{11.26}$$
$$+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(rQ\right)}{\partial r} - \frac{\partial P}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi.$$

Приклад 11.1. Знайти всі розв‘язки рівняння Лапласа $\Delta u = 0$, що залежать тільки від відстані r.

❍Шукана функція u повинна залежать тільки від відстані r точки M від початку координат, тобто $u = u\left(r\right)$. Тому, рівняння Лапласа $\Delta u = 0$ в сферичних координатах буде мати вигляд

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0.$$

Звідки маємо

$$r^2\frac{\partial u}{\partial r} = C_1 \Rightarrow u\left(r\right) = \frac{C_1}{r} + C_2, \quad \left\{C_1, C_2\right\} \subset \mathbb{R} \; \bullet$$