Лекція 10. Основні класи векторних полів

Короткий зміст

Короткий зміст

У цій лекції:

— означено поняття соленоїдального поля, розглянуто його властивості;

— запроваджено поняття потенціального поля, потенціалу векторного поля, розглянуто методи знаходження потенціалу;

— наведено означення гармонічного (лапласового) поля.

10.1. Соленоїдальне поле

10.1.1. Означення соленоїдального поля

Означення 10.1. Векторне поле $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ називається *соленоїдальним* або *трубчастим* в деякій області Ω, якщо в усіх точках цієї області дивергенція поля $\vec{a}$ дорівнює нулю. Тобто

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = 0,\ \forall M \in \Omega. \tag{10.1}$$

Приміром, соленоїдальними полями є:

1) поле швидкостей твердого тіла, що обертається навколо деякої осі;

2) магнітне поле, створене прямолінійним провідником, вздовж якого тече електричний струм.

З формули Остроградського — Гауса випливає, що в соленоїдальному полі потік вектора через довільну замкнену поверхню Σ, що лежить в цьому полі дорівнює нулю

$$\Pi = \oiint\limits_{\Sigma} \left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) d\sigma = 0. \tag{10.2}$$

Соленоїдальне поле характеризується тим, що воно не має в області ні джерел, ні стоків.

Приклад 10.1. Довести, що поле лінійних швидкостей $\vec{v}$ твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі із сталою кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, соленоїдальне.

❍Візьмемо за вісь обертання твердого тіла вісь Oz. Тоді лінійна швидкість $\vec{v} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}$. Знайдемо дивергенцію векторного поля $\vec{v}$:

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial}{\partial x}(-\omega y) + \frac{\partial}{\partial y}(\omega x) + \frac{\partial}{\partial z}(0) = 0.$$

Отже, поле лінійних швидкостей $\vec{v}$ твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі соленоїдальне. ●

10.1.2. Властивості соленоїдального поля

Розглянемо в області Ω, в якій задано поле вектора $\vec{a}$, яку-небудь площадку Σ. Тоді векторною трубкою буде сукупність векторних ліній, що проходять через межу $\Gamma = \partial\Sigma$ цієї площадки.

Властивість 1 (*Принцип збереження інтенсивності векторної трубки.*)
В соленоїдальному полі потік вектора $\vec{a}$ через довільний переріз векторної трубки зберігає стале значення (яке називається *інтенсивністю трубки*).

► Нехай Σ_1 і Σ_2 — довільні неперетинні перерізи однієї векторної трубки, Σ_3 — бічна поверхня трубки між перерізами (рис. 10.1).

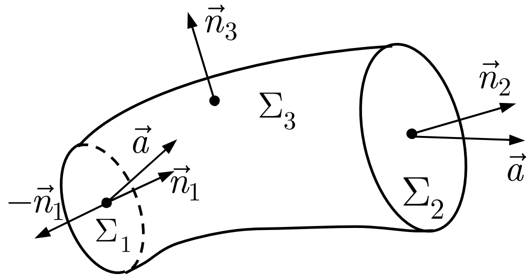

Рис. 10.1

Вектори нормалей $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ до перерізів Σ_1 і Σ_2 вибираємо так, щоб вони були напрямлені в бік напряму вектора $\vec{a}$ поля.

Доведемо, що

$$\iint\limits_{\Sigma_1}\left(\vec{a},\vec{n}^0\right)d\sigma=\iint\limits_{\Sigma_2}\left(\vec{a},\vec{n}^0\right)d\sigma.$$

Поверхні Σ_1, Σ_2 і Σ_3 разом утворюють замкнену поверхню Σ. Оскільки в соленоїдальному полі $\operatorname{div}\vec{a}=0$, то

$$\oiint\limits_{\Sigma}\left(\vec{a},\vec{n}^0\right)d\sigma=0.$$

Враховуючи адитивність поверхневого інтеграла другого роду, маємо

$$\oiint\limits_{\Sigma}\left(\vec{a},\vec{n}^0\right)d\sigma=\iint\limits_{\Sigma_1}(\vec{a},(-\vec{n}_1^0))d\sigma+\iint\limits_{\Sigma_2}(\vec{a},\vec{n}_2^0)d\sigma+\iint\limits_{\Sigma_3}(\vec{a},\vec{n}_3^0)d\sigma=0, \tag{10.3}$$

де в кожному інтегралі нормаль зовнішня до замкненого тіла.

Поверхня Σ_3 складається з векторних ліній, дотична до яких в кожній точці, за означенням, паралельна вектору $\vec{a}$. Тоді вектор нормалі перпендикулярний до вектора $\vec{a}$. Отже,

$$\vec{n}_3\perp\vec{a}\Rightarrow\left(\vec{a},\vec{n}_3\right)=0.$$

Змінюючи напрям вектора нормалі в інтегралі по поверхні Σ_1 на протилежний, з рівності (12.3) маємо

$$\iint\limits_{\Sigma_1}\left(\vec{a},\vec{n}_1^0\right)d\sigma=\iint\limits_{\Sigma_2}\left(\vec{a},\vec{n}_2^0\right)d\sigma$$

або остаточно

$$\iint\limits_{\Sigma_1}\left(\vec{a},\vec{n}^0\right)d\sigma=\iint\limits_{\Sigma_2}\left(\vec{a},\vec{n}^0\right)d\sigma.\blacktriangleleft$$

В гідродинаміці ця властивість означає наступне: якщо $\vec{a}$ — поле швидкостей рідини, то об'єм цієї рідини, що протікає через довільний переріз векторної трубки за одиницю часу один і той самий.

Властивість 2 В соленоїдальному полі потік вектора $\vec{a}$ через довільну поверхню, напнуту на даний контур Γ один і той самий:

$$\iint\limits_{\Sigma_1}\left(\vec{a},\vec{n}^0\right)d\sigma=\iint\limits_{\Sigma_2}\left(\vec{a},\vec{n}^0\right)d\sigma,$$

де Σ_1 і Σ_2 мають спільну межу Γ.

Доведення властивості 2 аналогічне попередньому.

Властивість 3 Соленоїдальне поле є полем ротора деякого векторного поля, тобто якщо $\operatorname{div}\vec{a} = 0$, то існує таке поле $\vec{b}$, що $\vec{a} = \operatorname{rot}\vec{b}$. Вектор $\vec{b}$ називається *векторним потенціалом* поля $\vec{a}$.

Властивість 3 приймаємо без доведення. Обернене твердження — поле ротора векторного поля є соленоїдальним, тобто $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0$ — доведено в лекції 9.

Зауваження 10.1. У соленоїдальному полі векторні лінії не можуть ані починатись, ані закінчуватись усередині поля. Вони або замкнені, або починаються і закінчуються на межі поля, або мають нескінченні гілки (у разі необмеженого поля).

10.1.3. Знаходження векторного потенціалу

Соленоїдальне поле $\vec{a}$ є полем ротора деякого векторного поля $\vec{b}$. Тобто $\operatorname{div}\vec{a} = 0 \Rightarrow \exists\vec{b}$:

$$\vec{a} = \operatorname{rot}\vec{b}. \tag{10.4}$$

Нехай

$$\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

Векторний потенціал $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ задовольняє співвідношення, що задовольняють умові (10.4):

$$P = \frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z},\ Q = \frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x},\ R = \frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y}. \tag{10.5}$$

Для соленоїдального поля $\vec{a}$ векторний потенціал $\vec{b}$ знаходиться неоднозначно: умові (10.5) також задовольняє вектор

$$\vec{b}_1 = \vec{b} + \operatorname{grad}\varphi(M),$$

де $\varphi(M)$ — довільна скалярна диференційовна функція, оскільки $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi(M) \equiv \vec{0}$.

Знаходження векторного потенціалу $\vec{b}(M)$ зводиться до знаходження довільного частинного розв'язку системи рівнянь (10.5) відносно невідомих b_x, b_y, b_z. Враховуючи довільність вибору $\vec{b}(M)$, для спрощення покладемо, приміром, $b_x = 0$. Тоді з (10.5) маємо

$$\begin{cases} \dfrac{\partial b_z}{\partial y} - \dfrac{\partial b_y}{\partial z} = P, \\ -\dfrac{\partial b_z}{\partial x} = Q, \\ \dfrac{\partial b_y}{\partial x} = R. \end{cases} \tag{10.6}$$

З останніх двох рівнянь системи (10.6) знаходимо

$$b_z = -\int Q(x, y, z)\,dx + C_1(y, z),$$

$$b_y = \int R(x, y, z)\,dx + C_2(y, z),$$

де $C_i(y, z), i = 1, 2$ — довільні диференційовні функції. Знову для спрощення покладемо $C_2(y, z) = 0$, а $C_1(y, z)$ виберемо так, щоб задовольнити першому рівнянню системи (10.6). Підставимо вирази для b_z, b_y в перше рівняння:

$$-\frac{\partial}{\partial y}\int Q(x, y, z)\,dx + \frac{\partial C_1(y, z)}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\int R(x, y, z)\,dx = P(x, y, z).$$

Звідки

$$\frac{\partial C_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int Q(x, y, z)\,dx + \frac{\partial}{\partial z}\int R(x, y, z)\,dx + P(x, y, z).$$

Проінтегруємо останню рівність за змінною y, одержимо

$$C_1(y, z) = \int\left(\frac{\partial}{\partial y}\int Q(x, y, z)\,dx + \frac{\partial}{\partial z}\int R(x, y, z)\,dx + P(x, y, z)\right)dy + \\ +C_3(z).$$

Знову покладемо $C_3(z) = 0$.

Таким чином, маємо вектор $\vec{b}(M)$, що задовольняє рівнянню (10.4):

$$\vec{b}(M) = \vec{j}\int R(x, y, z)\,dx + \\ +\vec{k}\left[\int\left(\frac{\partial}{\partial y}\int Q(x, y, z)\,dx + \frac{\partial}{\partial z}\int R(x, y, z)\,dx + P(x, y, z)\right)dy - \\ -\int Q(x, y, z)\,dx\right]. \tag{10.7}$$

Приклад 10.2. Перевірити, що векторне поле $\vec{a} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$ соленоїдальне і знайти векторний потенціал $\vec{b}$.

❍Векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальне, оскільки

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial(yz)}{\partial x} + \frac{\partial(zx)}{\partial y} + \frac{\partial(xy)}{\partial z} = 0.$$

Для знаходження вектора $\vec{b}$ маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial b_z}{\partial y} - \dfrac{\partial b_y}{\partial z} = yz, \\ -\dfrac{\partial b_z}{\partial x} = zx, \\ \dfrac{\partial b_y}{\partial x} = xy. \end{cases}$$

Розв'язуючи друге і третє рівняння, одержимо

$$b_z = -\frac{zx^2}{2} + C_1(y, z),$$

$$b_y = \frac{yx^2}{2}.$$

Функцію $C_1(y, z)$ підбираємо так, щоб задовольнити перше рівняння

$$\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z} + \frac{\partial C_1}{\partial y} = yz.$$

Тоді

$$C_1(y, z) = \int yz dy = \frac{zy^2}{2},$$

а векторний потенціал

$$\vec{b} = \frac{x^2 y}{2}\vec{j} + \frac{z}{2}(y^2 - x^2)\vec{k}. \bullet$$

10.2. Потенціальне поле

Означення 10.2. Векторне поле $\vec{a}(M)$ називають *потенціальним*, якщо існує скалярна функція $u(M)$ така, що

$$\operatorname{grad} u = \vec{a}. \tag{10.8}$$

Скалярну функцію $u(M)$ називають *скалярним потенціалом* ($\Leftrightarrow$ *потенціалом*) векторного поля $\vec{a}(M)$. Поверхні рівня функції $u(M)$ називають *еквіпотенціальними поверхнями*.

Приміром, потенціальними полями є:
1) магнітне поле, створене рухомим прямолінійним провідником;
2) поле тяжіння заданої маси до нерухомого центра (гравітаційне поле);
3) електричне поле напруженості точкового заряду.

Нехай в декартовій системі координат визначено векторне поле

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k},$$

де функції $P(x,y,z), Q(x,y,z)$ і $R(x,y,z)$ мають неперервні перші частинні похідні за змінними x, y, z в поверхнево-однозв'язній області Ω, в якій задано вектор $\vec{a}$.

Припускаємо, що потенціал $u = u(x, y, z)$ векторного поля $\vec{a}$ двічі неперервно диференційовна скалярна функція. Тоді

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

З означення 10.2 випливає, що в потенціальному полі $\operatorname{grad} u = \vec{a}$, отже

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y, z), \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y, z), \frac{\partial u}{\partial z} = R(x, y, z).$$

Зауваження 10.2. Потенціал векторного поля визначається з точністю до сталої. Дійсно, якщо u — потенціал векторного поля $\vec{a}$, то $\vec{a} = \operatorname{grad} u = \operatorname{grad}(u + C)$, де $C = \text{const}$, тобто $u + C$ — також потенціал поля $\vec{a}$.

Теорема 10.1. Для того, щоб поле вектора $\vec{a}$ було потенціальним в поверхнево-однозв'язній області Ω, необхідно і достатньо, щоб воно було безвихровим, тобто щоб його ротор дорівнював нулю в усіх точках поля:

$$\operatorname{rot} \vec{a} \equiv \vec{0}.$$

► $\boxed{\Rightarrow}$ Нехай поле вектора $\vec{a}$ потенціальне, тобто $\vec{a} = \operatorname{grad} u$. Тоді:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u \equiv \vec{0}.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Нехай поле вектора $\vec{a}$ безвихрове. З умови

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = \vec{0}$$

випливає рівність частинних похідних

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Тобто в безвихровому полі виконується умова 4) теореми про еквівалентність чотирьох умов. За теоремою, ця умова еквівалентна умові 3):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \frac{\partial u}{\partial z} = R.$$

Отже, $\operatorname{grad} u = \vec{a}$ і поле вектора $\vec{a}$ потенціальне.◄

Таким чином, теорему про еквівалентність чотирьох умов можна сформулювати, враховуючи вивчені вже поняття векторного аналізу.

Теорема 10.2. Нехай векторне поле

$$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

має неперервно диференційовні в поверхнево-однозв'язній області Ω проекції P, Q і R. Тоді наступні твердження еквівалентні:

1) поле вектора $\vec{a}$ — потенціальне;

2) циркуляція векторного поля $\vec{a}$ по замкненому контуру дорівнює нулю:

$$C = \oint\limits_{\Gamma} \left(\vec{a}, \vec{\tau}^0 \right) dl = 0;$$

3) криволінійний інтеграл від поля $\vec{a}$ не залежить від шляху інтегрування, а тільки від початкової і кінцевої точок;

4) поле вектора $\vec{a}$ безвихрове: $\operatorname{rot} \vec{a} \equiv \vec{0}$.

Можна стверджувати, що задача знаходження потенціалу векторного поля є задачею відновлення функції за її повним диференціалом $du = Pdx + Qdy + Rdz$.

Методи знаходження потенціалу векторного поля:

1) інтегрування криволінійного інтеграла

$$u(x, y, z) = \int\limits_{(x_0;y_0;z_0)}^{(x;y;z)} Pdx + Qdy + Rdz + C,\ C = \text{const}$$

,

який не залежить від форми шляху інтегрування, вдовж ламаної, ланки якої паралельні осям координат. Для відшукання функції $u(x, y, z)$ маємо формулу

$$u(x, y, z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, z)dz + C \qquad (10.9);$$

2) метод відновлення функції $u(x, y, z)$ за її похідними з трьох скалярних рівностей

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P,\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q,\ \frac{\partial u}{\partial z} = R,$$

які еквівалентні умові $\operatorname{grad} u = \vec{a}$.

Зауваження 10.3. В потенціальному полі робота А по переміщенню матеріальної точки з точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ в точку $M_2(x_2; y_2; z_2)$ обчислюється за формулою

$$\text{А} = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1) = \int\limits_{(x_1;y_1;z_1)}^{(x_2;y_2;z_2)} \left(\vec{a}, \vec{\tau}^0 \right) dl.$$

Приклад 10.3. Довести, що векторне поле $\vec{a} = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$ потенціальне і знайти його потенціал.

❍Перевіримо потенціальність поля $\vec{a}$, для цього обчислимо ротор поля:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = \vec{i}(1-1) - \vec{j}(1-1) + \vec{k}(1-1) = \vec{0}.$$

Отже, поле потенціальне. Знайдемо потенціал поля $\vec{a}$ двома способами.

1) За формулою (10.9), взявши за початкову точку M_0 початок координат $O(0;0;0)$, маємо

$$u(x,y,z)=\int_0^x 0dx+\int_0^y (x+0)dy+\int_0^z (x+y)dz+C=xy+(x+y)z+C.$$

Таким чином,

$$u(x,y,z)=xy+xz+yz+C,\ C=\mathrm{const}.$$

2) Складемо скалярні рівності, що рівносильні означенню потенціального поля $\operatorname{grad} u=\vec{a}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y+z, \tag{10.10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+z, \tag{10.11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x+y. \tag{10.12}$$

Проінтегруємо рівність (10.10) за змінною x, одержимо

$$u(x,y,z)=\int_0^x (y+z)dx=xy+xz+\varphi(y,z), \tag{10.13}$$

де $\varphi(y,z)$ — деяка диференційовна функція змінних y і z.

Продиференціюємо праву частину рівності (10.13) за змінною y:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+\frac{\partial\varphi(y,z)}{\partial y},$$

звідки, враховуючи (10.11), маємо

$$x+z=x+\frac{\partial\varphi(y,z)}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial\varphi(y,z)}{\partial y}=z.$$

Інтегруємо останню рівність по y, знаходимо

$$\varphi(y,z)=\int_0^y zdy=yz+\psi(z), \tag{10.14}$$

де $\psi(z)$ — деяка функція змінної z.

Підставимо рівність (10.14) в (10.13):

$$u(x,y,z)=xy+xz+yz+\psi(z).$$

Диференціюємо останню рівність за змінною z, враховуючи співвідношення (10.12), одержимо рівняння для знаходження функції $\psi(z)$:

$$x+y=x+y+\frac{d\psi(z)}{dz}\Rightarrow\frac{d\psi(z)}{dz}=0\Rightarrow\psi(z)=C=\mathrm{const}.$$

Таким чином,

$$u(x,y,z)=xy+xz+yz+C. \bullet$$

Зауваження 10.4. Інколи означення потенціального поля впроваджують у вигляді $\vec{a}=-\operatorname{grad} u$. Знак «мінус» пишуть для зручності, оскільки зазвичай векторні лінії поля напрямлені в бік спадання поля u: потік рідини напрямлений туди, де менше тиск; теплота переміщується від більш нагрітого місця до менш нагрітого. Приміром, вектор напруженості електростатичного поля $\vec{E} = \dfrac{q}{r^3}\vec{r}$ дорівнює градієнту потенціала цього поля, взятому із знаком «мінус»:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\frac{q}{r}\ .$$

10.3. Гармонічне поле

Означення 10.3. Векторне поле $\vec{a}$ називають *гармонічним* або *лапласовим*, якщо воно одночасно є потенціальним і соленоїдальним, тобто якщо в кожній точці поля

$$\operatorname{rot}\vec{a} = 0,\ \operatorname{div}\vec{a} = 0. \tag{10.15}$$

Приміром, гармонічними полями є:

1) електричне поле точкового заряду;

2) поле лінійних швидкостей стаціонарного безвихрового потоку рідини при відсутності в ньому джерел і стоків.

Оскільки поле $\vec{a}$ потенціальне, то його можна записати у вигляді

$$\vec{a} = \operatorname{grad} u\,,$$

де $u = u(x, y, z)$ — потенціал поля. Векторне поле соленоїдальне, тому

$$\operatorname{div}\vec{a} = \operatorname{div}\operatorname{grad} u = 0,$$

тобто

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Таким чином, потенціальна функція $u(x, y, z)$ гармонічного поля $\vec{a}$ є розв'язком диференціального рівняння Лапласа. Отже, потенціал гармонічного поля є гармонічною функцією.

Приклад 10.4. Показати, що векторне поле магнітної напруженості лінійного струму $\vec{H} = \dfrac{2I}{x^2 + y^2}\left(-y\vec{i} + x\vec{j}\right)$ гармонічне, а його потенціал справджує рівняння Лапласа.

❍ Покажемо, що поле $\vec{H}$ соленоїдальне і потенціальне. Знайдемо $\operatorname{div}\vec{H}$ і $\operatorname{rot}\vec{H}$:

$$\operatorname{div}\vec{H} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2Iy}{x^2 + y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2Ix}{x^2 + y^2}\right) = \frac{4Ixy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} - \frac{4Ixy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = 0;$$

$$\operatorname{rot}\vec{H}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -\dfrac{2Iy}{x^2+y^2} & \dfrac{2Ix}{x^2+y^2} & 0\end{vmatrix}=\left(\frac{2I\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{2I\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\vec{k}=\vec{0}.$$

Оскільки $\operatorname{div}\vec{H}=0, \operatorname{rot}\vec{H}=\vec{0}$, то векторне поле гармонічне.

Знайдемо потенціал поля $\vec{H}$, за початок руху вибираючи точку $(1;0)$:

$$u\left(x,y\right)=\int\limits_{(1;0)}^{(x;y)}-\frac{2Iy}{x^2+y^2}dx+\frac{2Ix}{x^2+y^2}dy+C=\int\limits_{1}^{x}0dx+$$

$$+\int\limits_{0}^{y}\frac{2Ix}{x^2+y^2}dy=2I\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C.$$

Отже,

$$u(x,y)=2I\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C.$$

Рівняння Лапласа для функції двох змінних має вигляд

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Перевіримо, що знайдений потенціал $u(x,y)$ векторного поля $\vec{H}$ справджує рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2Iy}{x^2+y^2},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2Ix}{x^2+y^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{4Ixy}{\left(x^2+y^2\right)^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{4Ixy}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

$$\Delta u=\frac{4Ixy}{\left(x^2+y^2\right)^2}-\frac{4Ixy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\equiv 0.$$

Таким чином, ми показали, що векторне поле $\vec{H}$ гармонічне і його потенціал є гармонічною функцією, тобто є розв'язком рівняння Лапласа.●

10.4. Рівняння Максвела

Нехай в деякій частині простору створено електричне поле, що характеризується векторами електричної і магнітної напруженості $\vec{E}$ та $\vec{H}$. В загальному випадку вектори $\vec{E}$ та $\vec{H}$ залежать не тільки від точки, що розглядається, а і від часу t (випадок нестаціонарного поля), тобто є функціями $\vec{E}=\vec{E}\left(x,y,z,t\right)$, $\vec{H}=\vec{H}\left(x,y,z,t\right)$. Середа, в якій відбуваються електричні і пов‘язані з ними магнітні явища, характеризуються величинами γ,ε і μ (γ - провідність, ε - діелектрична проникність, μ - проникність). В однорідному середовищі γ,ε та μ будуть сталими величинами, але в загальному випадку вони також будуть функціями x, y, z і t. Нехай $\vec{i}$ - вектор густини електричного струму, тобто вектор, чисельно рівний кількості електрики, що протікає за одиницю часу (похідній від кількості електрики за часом) крізь одиничну площадку, що перпендикулярна напряму руху електрики, причому вектор $\vec{i}$ напрямлений в бік цього руху. Вектор густини $\vec{i}$ складається зі струму провідності $\gamma\vec{E}$ (закон Ому) і току зміщення, що одержують в наслідок індукції в діелектриках, від дорівнює $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\left(\varepsilon\vec{E}\right)}{\partial t}$.

Таким чином,

$$\vec{i} = \gamma\vec{E} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\left(\varepsilon\vec{E}\right)}{\partial t}. \tag{10.16}$$

Розглянемо довільну замкнену криву L, що обмежує поверхню S. Закон електромагнітної індукції Фарадея свідчить: циркуляція електричного вектору $\vec{E}$ (електрорушійна сила) вздовж L дорівнює похідній за часом від потоку вектора магнітної індукції $\mu\vec{H}$ через поверхню S, взятій зі знаком мінус

$$\oint_L \vec{E}d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \mu\vec{H}d\vec{\sigma}.$$

Як відомо, при вельми загальних припущеннях відносно підінтегральної функції диференціювання за параметром можна виконувати під знаком інтегралу, тому

$$\oint_L \vec{E}d\vec{r} = -\iint_S \frac{\partial\left(\mu\vec{H}\right)}{\partial t}d\vec{\sigma}.$$

За теоремою Стокса

$$\iint_S \operatorname{rot}\vec{E}d\vec{\sigma} = -\iint_S \frac{\partial\left(\mu\vec{H}\right)}{\partial t}d\vec{\sigma}. \tag{10.17}$$

Формула (10.17) справедлива для довільної поверхні S, а це можливо тільки тоді, коли підінтегральні функції співпадають. Отже,

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\left(\mu\vec{H}\right)}{\partial t}.$$

Це так зване, друге рівняння Максвела у векторній формі. Перше рівняння Максвела одержуємо наступним чином. Згідно з формулою (8.17) циркуляція вектора магнітної напруженості вздовж межі перерізу дроту, вздовж якого тече струм:

$$\oint_L \vec{H}d\vec{r} = 4\pi I.$$

Враховуючи формулу (10.16)

$$I=\iint_S \vec{i}d\vec{\sigma}=\iint_S\left(\gamma\vec{E}+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\left(\varepsilon\vec{E}\right)}{\partial t}\right)\cdot d\vec{\sigma}.$$

Отже,

$$\oint_L \vec{H}d\vec{r}=4\pi\iint_S\left(\gamma\vec{E}+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\left(\varepsilon\vec{E}\right)}{\partial t}\right)\cdot d\vec{\sigma}.$$

Застосовуючи формулу Стокса і ототожнюючи підінтегральні функції в обох частинах рівності, одержуємо перше рівняння Максвела у векторній формі:

$$\operatorname{rot}\vec{H}=4\pi\left(\gamma\vec{E}+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\left(\varepsilon\vec{E}\right)}{\partial t}\right).$$

Щоб мати можливість вимірювати величини, пов‘язані з електричним або магнітним полями, в абсолютних електростатичних і електромагнітних одиницях, в праві частини рівнянь Максвела доводиться вводити множник $1/c$, де $c=3\cdot 10^{10}$ см/с – швидкість світла в порожнині. Тоді рівняння Максвела набувають вигляду

$$\operatorname{rot}\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\left(\gamma\vec{E}+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\left(\varepsilon\vec{E}\right)}{\partial t}\right). \tag{10.18}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\left(\mu\vec{H}\right)}{\partial t}. \tag{10.19}$$

До цих двох рівнянь Максвела додають ще два додаткових.

Для векторів $\varepsilon\vec{E}$ і $\mu\vec{H}$ виконуються рівності

$$\operatorname{div}\varepsilon\vec{E}=4\pi\rho \tag{10.20}$$

і

$$\operatorname{div}\mu\vec{H}=0. \tag{10.21}$$

Якщо електромагнітне поле не містить зарядів, то їх густина ρ дорівнює нулеві і рівняння (10.20) набуває вигляду

$$\operatorname{div}\varepsilon\vec{E}=0. \tag{10.22}$$

Запишемо рівняння Максвела в прямокутних координатах. Нехай $\vec{E}=E_x\vec{i}+E_x\vec{j}+E_x\vec{k}$, $\vec{H}=H_x\vec{i}+H_x\vec{j}+H_x\vec{k}$.

Тому рівняння (10.18) рівносильне рівнянням:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{4\pi}{c}\left(\gamma E_x + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\left(\varepsilon E_x\right)}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{4\pi}{c}\left(\gamma E_y + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\left(\varepsilon E_y\right)}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{4\pi}{c}\left(\gamma E_z + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\left(\varepsilon E_z\right)}{\partial t}\right).$$

Рівняння (10.19) дає:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\left(\mu H_x\right)}{\partial t},\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\left(\mu H_y\right)}{\partial t},$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\left(\mu H_z\right)}{\partial t}.$$

Рівняння (10.20), (10.21) набувають вигляду

$$\frac{\partial\left(\varepsilon E_x\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\varepsilon E_y\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\varepsilon E_z\right)}{\partial z} = 4\pi\rho,$$

$$\frac{\partial\left(\mu H_x\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\mu H_y\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\mu H_z\right)}{\partial z} = 0.$$

У випадку, коли фізична середа однорідна і не містить електричних зарядів, тобто коли ε, γ та μ - сталі величини, а $\rho = 0$, рівняння Максвела набувають вигляду

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\left(\gamma\vec{E} + \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial\left(\vec{E}\right)}{\partial t}\right),$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\left(\vec{H}\right)}{\partial t},$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0,$$

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0.$$