1. Розв'язання навчальних задач

Навчальна задача 10.1. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a} = \left(x^2 y + y^3 \right) \vec{i} + \left(x^3 - xy^2 \right) \vec{j}$ соленоїдальним.

❍Згідно з означенням, векторне поле соленоїдальне, якщо $\operatorname{div} \vec{a} = 0$. Знайдемо $\operatorname{div} \vec{a}$:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 y + y^3 \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 - xy^2 \right) = 2xy - 2xy = 0.$$

Отже, задане векторне поле соленоїдальне.●

Навчальна задача 10.2. Довести, що векторне поле $\vec{a} = \frac{x}{yz}\vec{i} + \frac{y}{xz}\vec{j} - \frac{(x+y)\ln z}{xy}\vec{k}$ соленоїдальне.

❍ Знайдемо $\operatorname{div} \vec{a}$:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{yz} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{xz} \right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\left(x+y\right)\ln z}{xy} \right) =$$

$$= \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} - \frac{x+y}{xyz} = \frac{x+y}{xyz} - \frac{x+y}{xyz} = 0.$$

Оскільки $\operatorname{div} \vec{a} = 0$, то задане векторне поле соленоїдальне.●

Навчальна задача 10.3. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a} = \left(y^2 e^{xy^2} + 3 \right) \vec{i} + \left(2xye^{xy^2} - 1 \right) \vec{j}$ потенціальним. Якщо так, то знайти його потенціал.

❍ Для того, щоб плоске векторне поле було потенціальним необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Перевіримо цю умову:

$$P(x,y) = y^2 e^{xy^2} + 3,\ Q(x,y) = 2xye^{xy^2} - 1;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^{xy^2}\left(2y + 2xy^3 \right) = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Отже, поле потенціальне. Потенціал $u(x,y)$ знайдемо за формулою

$$u(x,y) = \int_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy + C.$$

Інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування, тому інтегрувати будемо вздовж ламаної, ланки якої паралельні осям координат, обираючи за початок руху точку $O(0;0)$ (рис. 10.1).

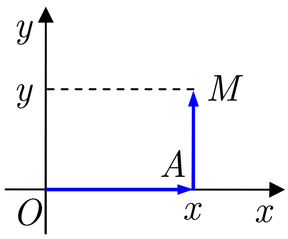

Рис. 10.1

Маємо

$$u(x,y)=\int\limits_{(0;0)}^{(x;y)}\left(y^2e^{xy^2}+3\right)dx+\left(2xye^{xy^2}-1\right)dy+C=$$

$$=\left|\begin{matrix}OA: y=0, dy=0, x\in[0;x]\\ AM: x=x=\text{const}, dx=0, y\in[0;y]\end{matrix}\right|=\int\limits_0^x 3dx+\int\limits_0^y\left(2xye^{xy^2}-1\right)dy+$$

$$+C=3x+\left(e^{xy^2}-y\right)\Big|_0^y+C=3x+e^{xy^2}-y+C_1,\ C_1=C-1.$$

Зробимо перевірку:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3+y^2e^{xy^2}=P(x,y);\ \frac{\partial u}{\partial y}=2xye^{xy^2}-1=Q(x,y).$$

Отже,

$$u(x,y)=3x+e^{xy^2}-y+C.\ \bullet$$

Навчальна задача 10.4. Довести, що векторне поле $\vec{a}=\left(y\vec{i}+x\vec{j}\right)\operatorname{arctg} z+\dfrac{xy}{1+z^2}\vec{k}$ потенціальне і знайти його потенціал. Знайти роботу векторного поля $\vec{a}$ при переміщенні матеріальної точки з точки $O(0;0;0)$ в точку $B\left(1;1;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

❍ Необхідною і достатньою умовою потенціальності векторного поля є умова $\operatorname{rot}\vec{a}=\vec{0}$. Маємо

$$P(x,y,z)=y\operatorname{arctg} z,\ Q(x,y,z)=x\operatorname{arctg} z,\ R(x,y,z)=\frac{xy}{1+z^2};$$

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y\operatorname{arctg} z & x\operatorname{arctg} z & \dfrac{xy}{1+z^2}\end{vmatrix}=\left(\frac{x}{1+z^2}-\frac{x}{1+z^2}\right)\vec{i}-$$

$$-\left(\frac{y}{1+z^2}-\frac{y}{1+z^2}\right)\vec{j}+(\operatorname{arctg} z-\operatorname{arctg} z)\vec{k}=\vec{0}.$$

Отже, поле $\vec{a}$ потенціальне. Виберемо криву інтегрування, як вказано на рис. 10.2.

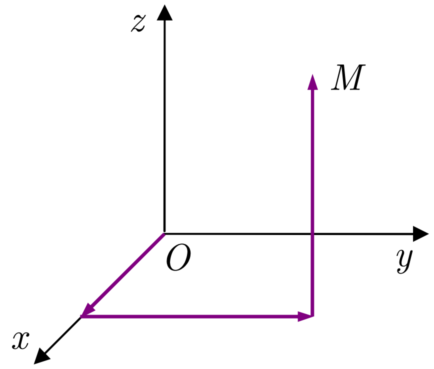

Рис. 10.2

$$u(x,y,z)=\int\limits_{M_0(x_0;y_0;z_0)}^{M(x;y;z)} Pdx+Qdy+Rdz+C=$$

$$=\int\limits_{O(0;0;0)}^{M(x;y;z)} y\operatorname{arctg} z dx+x\operatorname{arctg} z dy+\frac{xy}{1+z^2}dz=\int\limits_0^x 0dx+\int\limits_0^y 0dy+$$

$$+\int\limits_0^z \frac{xy}{1+z^2}dz+C=xy\operatorname{arctg} z+C.$$

Таким чином,

$u(x,y,z)=xy\operatorname{arctg} z+C$, де C — довільна стала.

Знайдемо роботу векторного поля при переміщенні матеріальної точки з точки O в точку M_0. Робота дорівнюватиме різниці потенціалів поля $\vec{a}$ в цих точках:

$$\text{A}=u(B)-u(O)=xy\operatorname{arctg} z\Big|_B-xy\operatorname{arctg} z\Big|_O=1-0=1. \bullet$$

Навчальна задача 10.5. Показати, що векторне поле $\vec{a}=\dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}$ гармонічне.

❍Для гармонічного векторного поля повинні одночасно виконуватись умови:

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\vec{0},\ \operatorname{div}\vec{a}=0.$$

Знайдемо дивергенцію і ротор заданого векторного поля:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}\right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}\right) = \frac{y^2+z^2-2x^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^5}} + \frac{x^2+z^2-2y^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^5}} +$$

$$+\frac{x^2+y^2-2z^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^5}} = 0;$$

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{x}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}} & \dfrac{y}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}} & \dfrac{z}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{3yz}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^5}} + \frac{3yz}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^5}}\right)\vec{i} -$$

$$-\left(-\frac{3xz}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^5}} + \frac{3xz}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^5}}\right)\vec{j} +$$

$$+\left(-\frac{3xy}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^5}} + \frac{3xy}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^5}}\right)\vec{k} = \vec{0}.$$

Отже, векторне поле $\vec{a}$ гармонічне. ●

2. Задачі для самостійного розв’язання

Задача 10.1. Перевірити, чи є наступні векторні поля соленоїдальними:

1) $\vec{a} = \left(x^2 + 3y^5 - 2\right)\vec{i} + \left(2xy - x^4 + 1\right)\vec{j}$;

2) $\vec{a} = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} - \left(x^2 + y^2\right)z\vec{k}$;

3) $\vec{a} = \dfrac{x\vec{i} - y\vec{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{\left(x^2 - y^2\right)z}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\vec{k}$.

❍ 1) так; 2) так; 3) так. ●

Задача 10.2. Перевірити, що наступні векторні поля потенціальні і знайти їх потенціали:

1) $\vec{a} = \left(\frac{y}{1+x^2y^2} - 1\right)\vec{i} + \left(\frac{x}{1+x^2y^2} - 10\right)\vec{j}$;

2) $\vec{a} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$;

3) $\vec{a} = (yz - xy)\vec{i} + \left(xz - \frac{x^2}{2} + yz^2\right)\vec{j} + (xy + y^2z)\vec{k}$.

Відповідь. 1) $u(x,y) = \operatorname{arctg} xy - x - 10y + C$; 2) $u(x,y,z) = xyz + C$;
3) $u(x,y,z) = xyz - \frac{x^2y}{2} + \frac{y^2z^2}{2} + C$.

Задача 10.3.

Показати, що векторне поле $\vec{a} = \frac{\vec{r}}{r^3}$ потенціальне і соленоїдальне, а його потенціал є розв'язком рівняння Лапласа.