

Лекція 9. Диференціальні операції другого порядку

Короткий зміст

Розділ 9.1. *Оператор Гамільтона*

9.1.1. Поняття оператора Гамільтона

9.1.2. Властивості оператора Гамільтона

Розділ 9.2. *Диференціальні операції другого порядку*

Короткий зміст

У цій лекції:

- означено поняття оператора Гамільтона і розглянуто його властивості;
- наведено диференціальні операції другого порядку;
- введено поняття оператора Лапласа, розглянуто рівняння Лапласа.

9.1. Оператор Гамільтона

9.1.1. Поняття оператора Гамільтона

В лекціях 4 — 7 було розглянуто три основні операції векторного аналізу: обчислення $\text{grad } u$ для скалярного поля $u = u(x, y, z)$, $\text{div } \vec{a}$ і $\text{rot } \vec{a}$ для векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$. Їх називають *диференціальними операціями першого порядку*. Ці операції можна записати в більш простому вигляді, застосовуючи символічний оператор $\vec{\nabla}$ (набла):

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (9.1)$$

який називається *оператором Гамільтона*.

Оператор Гамільтона має і диференціальні, і векторні властивості. Формальний добуток, приміром, $\frac{\partial}{\partial x}$ на скалярну функцію $u(x, y, z)$ будемо розуміти як диференціювання: $\frac{\partial}{\partial x} \cdot u = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Виконуючи формальні операції векторної алгебри, будемо вважати оператор $\vec{\nabla}$ вектором.

Розглянемо дію оператора $\vec{\nabla}$ на скалярну і векторну функції.

1) Нехай $u = u(x, y, z)$ — скалярна диференційовна функція, тоді за правилом добутку вектора на скаляр, одержимо

$$\vec{\nabla} u = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = \text{grad } u,$$

тобто

$$\vec{\nabla} u = \text{grad } u. \quad (9.2)$$

2) Якщо $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$, де функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ диференційовні, то за формулою знаходження скалярного добутку векторів, заданих координатами, маємо

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla}, \vec{a}) &= \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}, P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} \right) = \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \text{div } \vec{a}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$(\vec{\nabla}, \vec{a}) = \text{div } \vec{a}. \quad (9.3)$$

3) Два вектори, як відомо, можна ще перемножити векторно, тому розглянемо векторний добуток векторів $\vec{\nabla}$ і \vec{a} :

$$[\vec{\nabla}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \\ + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = \text{rot } \vec{a}.$$

Отже,

$$[\vec{\nabla}, \vec{a}] = \text{rot } \vec{a}. \quad (9.4)$$

9.1.2. Властивості оператора Гамільтона

Нехай $\alpha, \beta = \text{const}$, $u = u(x, y, z), v = v(x, y, z)$ — диференційовні скалярні функції, \vec{c} — сталий вектор, $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z), \vec{b} = \vec{b}(x, y, z)$ — векторні функції, проекції яких мають неперервні похідні першого порядку.

Властивість 1

- 1) $\vec{\nabla} \alpha = 0$;
- 2) $\vec{\nabla} (\alpha u + \beta v) = \alpha \vec{\nabla} u + \beta \vec{\nabla} v$;
- 3) $\vec{\nabla} (uv) = u \vec{\nabla} v + v \vec{\nabla} u$.

Властивість 2

- 1) $(\vec{\nabla}, \vec{c}) = 0$;
- 2) $(\vec{\nabla}, \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) = \alpha (\vec{\nabla}, \vec{a}) + \beta (\vec{\nabla}, \vec{b})$;
- 3) $(\vec{\nabla}, u \vec{a}) = u (\vec{\nabla}, \vec{a}) + (\vec{\nabla} u, \vec{a})$.

Властивість 3

- 1) $[\vec{\nabla}, \vec{c}] = \vec{0}$;
- 2) $[\vec{\nabla}, \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}] = \alpha [\vec{\nabla}, \vec{a}] + \beta [\vec{\nabla}, \vec{b}]$;
- 3) $[\vec{\nabla}, u \vec{a}] = u [\vec{\nabla}, \vec{a}] + [\vec{\nabla} u, \vec{a}]$.

Властивості 1, 2 і 3 є властивостями градієнта скалярного поля, дивергенції і ротора векторного поля відповідно.

Зауваження 9.1.

1. Існує домовленість, що оператор $\vec{\nabla}$ діє на всі величини, які стоять справа від нього (тобто записані за ним) і не діє на ті, що знаходяться у виразі зліва. У зв'язку з цим немає повної аналогії з формулами векторної алгебри, приміром, $(\vec{\nabla}, \vec{a}) \neq (\vec{a}, \vec{\nabla})$. Треба розуміти, що вектор $\vec{\nabla}$ не має ні напрямку, ні довжини, тому, скажімо, вектор $[\vec{\nabla}, \vec{a}]$ не буде загалом перпендикулярним до вектора \vec{a} .

2. Коли оператор Гамільтона застосовують до добутку величин, мають на увазі звичайне правило диференціювання добутку. Кожний одержаний доданок перетворюють так, щоб оператор $\vec{\nabla}$ стояв перед останнім множником. Щоб показати, що $\vec{\nabla}$ не діє на яку-небудь величину, яка входить в складену формулу, цю величину позначають індексом c (const), який в остаточному результаті не пишуть.

Розглянемо приклад, який ілюструє дане зауваження.

Приклад 9.1.

Довести, що $\text{rot}(u\vec{a}) = [\text{grad } u, \vec{a}] + u \text{rot } \vec{a}$.

○ Перепишемо ліву частину рівності, застосовуючи оператор Гамільтона:

$$\text{rot}(u\vec{a}) = [\vec{\nabla}, u\vec{a}].$$

Враховуючи диференціальні властивості оператора $\vec{\nabla}$, маємо

$$[\vec{\nabla}, u\vec{a}] = [\vec{\nabla}, u\vec{a}_c] + [\vec{\nabla}, u_c\vec{a}].$$

У виразі $[\vec{\nabla}, u\vec{a}_c]$ оператор $\vec{\nabla}$ діє тільки на скалярну функцію u , тому

$$[\vec{\nabla}, u\vec{a}_c] = [\vec{\nabla}u, \vec{a}_c] = [\text{grad } u, \vec{a}_c] = [\text{grad } u, \vec{a}],$$

на останньому кроці індекс c не пишемо.

Оскільки u_c — сталий скаляр, то за властивостями векторного добутку його можна винести за знак векторного добутку, одержимо

$$[\vec{\nabla}, u_c\vec{a}] = u_c [\vec{\nabla}, \vec{a}] = u_c \cdot \text{rot } \vec{a} = u \text{rot } \vec{a}.$$

Остаточно запишемо

$$\text{rot}(u\vec{a}) = [\text{grad } u, \vec{a}] + u \text{rot } \vec{a}.$$

Одержаний вираз співпадає з останньою формулою властивості 3 оператора Гамільтона. ●

Приклад 9.2.

Довести рівність $\text{div} [\vec{a}, \vec{b}] = (\vec{b}, \text{rot } \vec{a}) - (\vec{a}, \text{rot } \vec{b})$.

○ Перепишемо ліву частину рівності, застосовуючи оператор $\vec{\nabla}$, і врахуємо його диференціальні властивості:

$$\text{div} [\vec{a}, \vec{b}] = (\vec{\nabla}, [\vec{a}, \vec{b}]) = (\vec{\nabla}, [\vec{a}_c, \vec{b}]) + (\vec{\nabla}, [\vec{a}, \vec{b}_c]).$$

Зважаючи на правило циклічної перестановки множників у мішаному добутку, перетворимо доданки в правій частині одержаного виразу так, щоб всі сталі множники знаходились зліва від оператора $\vec{\nabla}$:

$$(\vec{\nabla}, [\vec{a}_c, \vec{b}]) = -(\vec{\nabla}, [\vec{b}, \vec{a}_c]) = -(\vec{a}_c, [\vec{\nabla}, \vec{b}]) = -(\vec{a}, \text{rot } \vec{b});$$

$$(\vec{\nabla}, [\vec{a}, \vec{b}_c]) = (\vec{b}_c, [\vec{\nabla}, \vec{a}]) = (\vec{b}, \text{rot } \vec{a}).$$

Отже, одержимо необхідну рівність

$$\operatorname{div} [\vec{a}, \vec{b}] = (\vec{b}, \operatorname{rot} \vec{a}) - (\vec{a}, \operatorname{rot} \vec{b}). \bullet$$

9.2. Диференціальні операції другого порядку

В результаті виконання диференціальних операцій першого порядку виникає нове поле, скалярне або векторне. До цього поля можна знову застосувати одну з диференціальних операцій.

Нехай

$$u = u(x, y, z) \text{ —}$$

скалярне, а

$$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k} \text{ —}$$

векторне поле. Будемо вважати, що функції $u(x, y, z)$, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ і $R(x, y, z)$ необхідну кількість разів неперервно диференційовні.

Існує три диференціальні операції першого порядку, комбінуючи їх різними способами, можна було б одержати дев'ять диференціальних операцій другого порядку, але не всі вони мають сенс (табл. 9.1).

Табл. 9.1

$\nexists \operatorname{grad} \operatorname{grad} u$	$\exists \operatorname{div} \operatorname{grad} u$	$\exists \operatorname{rot} \operatorname{grad} u$
$\exists \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a}$	$\nexists \operatorname{div} \operatorname{div} \vec{a}$	$\nexists \operatorname{rot} \operatorname{div} \vec{a}$
$\nexists \operatorname{grad} \operatorname{rot} \vec{a}$	$\exists \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a}$	$\exists \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a}$

I. Нехай $u = u(x, y, z)$ — скалярне поле. В цьому полі оператор $\vec{\nabla}$ породжує векторне поле

$$\vec{\nabla} u = \operatorname{grad} u.$$

У векторному полі $\operatorname{grad} u$ можна визначити дві диференціальні операції:

$$(\vec{\nabla}, \vec{\nabla} u) = \operatorname{div} \operatorname{grad} u, \quad (9.5)$$

що приводить до скалярного поля, і

$$[\vec{\nabla}, \vec{\nabla} u] = \operatorname{rot} \operatorname{grad} u, \quad (9.6)$$

що задає векторне поле.

II. Нехай задано векторне поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Тоді оператор $\vec{\nabla}$ може породжувати в ньому скалярне поле

$$(\vec{\nabla}, \vec{a}) = \operatorname{div} \vec{a}.$$

В скалярному полі $\operatorname{div} \vec{a}$ оператор $\vec{\nabla}$ породжує векторне поле

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla}, \vec{a}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} u. \quad (9.7)$$

III. У векторному полі $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ оператор $\vec{\nabla}$ породжує також векторне поле

$$[\vec{\nabla}, \vec{a}] = \operatorname{rot} \vec{a}.$$

Застосовуючи до векторного поля $\text{rot } \vec{a}$ оператор $\vec{\nabla}$ можна одержати скалярне поле

$$(\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{a}]) = \text{div rot } \vec{a}, \quad (9.8)$$

а також векторне

$$[\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{a}]] = \text{rot rot } \vec{a}. \quad (9.9)$$

Формули (9.5) — (9.9) визначають *диференціальні операції другого порядку*. Розглянемо кожну з цих операцій в декартовій системі координат.

1. Нехай скалярна функція $u(x, y, z)$ має неперервні другі частинні похідні за всіма аргументами. Тоді

$$\begin{aligned} \text{div grad } u &= (\vec{\nabla}, \vec{\nabla} u) = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u. \end{aligned}$$

Символ

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (9.10)$$

називають *оператором Лапласа* або *лапласіаном*.

Символічно його можна представити скалярним квадратом оператора Гамільтона, тобто

$$\Delta = (\vec{\nabla}, \vec{\nabla}) = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Оператор Δ (дельта) відіграє важливу роль в рівняннях математичної фізики. Рівняння

$$\Delta u = 0, \quad \text{або} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (9.11)$$

називають *рівнянням Лапласа*.

Цим рівнянням, приміром, описується стаціонарний розподіл тепла. Скалярну функцію $u(x, y, z)$, що задовольняє рівняння Лапласа, називають *лапласовою* або *гармонічною*.

2. Припускаємо, що скалярна функція $u(x, y, z)$ має неперервні частинні похідні по x, y і z до другого порядку включно. Тоді

$$\text{rot grad } u \equiv \vec{0}.$$

Дійсно,

$$\text{rot grad } u = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) \vec{i} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \vec{k} = \vec{0}.$$

Зауваження 11.2.

Такий само результат можна одержати формально, як векторний добуток двох однакових «векторів»:

$$\text{rot grad } u = [\vec{\nabla}, \vec{\nabla} u] = [\vec{\nabla}, \vec{\nabla}] u = \vec{0}.$$

3. Нехай задано векторне поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, координати P, Q і R якого мають неперервні частинні похідні до другого порядку за аргументами x, y і z . Одержимо

$$\begin{aligned} \text{grad div } \vec{a} &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla}, \vec{a}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \vec{i} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \vec{k} = \\ &= \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial x} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial y} \right) \vec{j} + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) \vec{k}. \end{aligned}$$

4. Для векторного поля $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ з двічі неперервно диференційовними координатами P, Q і R маємо

$$\text{div rot } \vec{a} \equiv 0.$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} \text{div rot } \vec{a} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} \equiv 0. \end{aligned}$$

Зауваження 11.3.

Рівність нулеві поля дивергенції ротора вектора \vec{a} можна одержати формально за властивостями мішаного добутку векторів:

$$\text{div rot } \vec{a} = (\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{a}]) = (\vec{a}, [\vec{\nabla}, \vec{\nabla}]) = 0.$$

5. Накладаючи на координати P, Q і R векторного поля $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ такі само умови, що і в пунктах 3, 4, покажемо

$$\text{rot rot } \vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \Delta \vec{a}.$$

За властивостями подвійного векторного добутку маємо

$$\text{rot rot } \vec{a} = [\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{a}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}, \vec{a}) - (\vec{\nabla}, \vec{\nabla}) \vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \Delta \vec{a},$$

де $\Delta \vec{a} = \Delta P(x, y, z)\vec{i} + \Delta Q(x, y, z)\vec{j} + \Delta R(x, y, z)\vec{k}$.

Результати диференціальних операцій другого порядку запишемо в таблицю 9.2.

Табл. 9.2.

	Скалярне поле $u = u(x, y, z)$	Векторне поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$	
	grad	div	rot
grad		grad div \vec{a}	
div	div grad $u = \Delta u$		div rot $\vec{a} \equiv 0$
rot	rot grad $u \equiv \vec{0}$		rot rot $\vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \Delta \vec{a}$

Приклад 9.3.

Довести рівність $\text{rot rot } \vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \Delta \vec{a}$ за означенням ротора в декартовій системі координат.

○ Оскільки за означенням

$$\text{rot } \vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k},$$

то обчислимо поле ротора ротора \vec{a} :

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{a} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} \right) \vec{j} + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 P}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial y} \right) \vec{k} = \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z} \right) \vec{i} + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial y} \right) \vec{k} - \\ &- \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \right) \vec{j} - \\ &- \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} \right) \vec{k} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \vec{i} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \vec{k} - \\ &- \left(\Delta P \vec{i} + \Delta Q \vec{j} + \Delta R \vec{k} \right) = \text{grad div } \vec{a} - \Delta \vec{a}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\text{rot rot } \vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \Delta \vec{a}, \text{ де } \Delta \vec{a} = \Delta P \vec{i} + \Delta Q \vec{j} + \Delta R \vec{k}. \bullet$$