1. Розв'язання навчальних задач

Навчальна задача 9.1. Використовуючи правило дії оператора $\vec{\nabla}$ на добуток векторних полів, перевірити рівність:
$\operatorname{rot}\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\vec{b},\vec{\nabla}\right)\vec{a}-\left(\vec{a},\vec{\nabla}\right)\vec{b}+\vec{a}\operatorname{div}\vec{b}-\vec{b}\operatorname{div}\vec{a}.$

❍ Скористаємось властивостями подвійного векторного добутку:
$$\operatorname{rot}\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\vec{\nabla},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right]=\left[\vec{\nabla},\left[\vec{a}_c,\vec{b}\right]\right]+\left[\vec{\nabla},\left[\vec{a},\vec{b}_c\right]\right]=\vec{a}\left(\vec{\nabla},\vec{b}\right)-\left(\vec{a},\vec{\nabla}\right)\vec{b}+$$
$$+\left(\vec{b},\vec{\nabla}\right)\vec{a}-\vec{b}\left(\vec{\nabla},\vec{a}\right)=\vec{a}\operatorname{div}\vec{b}-\vec{b}\operatorname{div}\vec{a}+\left(\vec{b},\vec{\nabla}\right)\vec{a}-\left(\vec{a},\vec{\nabla}\right)\vec{b}.$$ ●

Навчальна задача 9.2. Знайти дивергенцію векторного поля $\vec{a}=\left[\vec{c},\operatorname{grad}u\right]$, де $\vec{c}$ — сталий вектор, $u=u(x,y,z)$ — скалярна функція.

❍ Раніше було показано, що $\operatorname{div}\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\vec{b},\operatorname{rot}\vec{a}\right)-\left(\vec{a},\operatorname{rot}\vec{b}\right)$ Тому
$$\operatorname{div}\vec{a}=\operatorname{div}\left[\vec{c},\operatorname{grad}u\right]=\left(\operatorname{grad}u,\operatorname{rot}\vec{c}\right)-\left(\vec{c},\operatorname{rot}\operatorname{grad}u\right).$$
За властивостями ротора векторного поля
$$\operatorname{rot}\vec{c}=\vec{0}$$
і
$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}u=\vec{0}.$$
Отже,
$$\operatorname{div}\vec{a}=\operatorname{div}\left[\vec{c},\operatorname{grad}u\right]=0.$$ ●

Навчальна задача 9.3. Знайти ротор векторного поля $\vec{a}=\left[\vec{c},\operatorname{grad}u\right]$, де $\vec{c}$ — сталий вектор, $u=u(x,y,z)$ — скалярна функція.

❍ В навчальній задачі 45.1. була доведена рівність:
$$\operatorname{rot}\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\vec{b},\vec{\nabla}\right)\vec{a}-\left(\vec{a},\vec{\nabla}\right)\vec{b}+\vec{a}\operatorname{div}\vec{b}-\vec{b}\operatorname{div}\vec{a}.$$
Використаємо її при розв'язанні даної задачі. Отже,
$$\operatorname{rot}\vec{a}=\operatorname{rot}\left[\vec{c},\operatorname{grad}u\right]=-\left(\vec{c},\vec{\nabla}\right)\operatorname{grad}u+\vec{c}\operatorname{div}\operatorname{grad}u=$$
$$=-\left(\vec{c},\vec{\nabla}\right)\operatorname{grad}u+\vec{c}\Delta u,$$
де $\operatorname{div}\operatorname{grad}u=\Delta u$, $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа. ●

Навчальна задача 9.4. Рівняння Максвелла електромагнітного поля мають вигляд
$\operatorname{rot}\vec{E}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}$, $\operatorname{rot}\vec{H}=\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, де $\vec{E}$ — напруга електричного поля, $\vec{H}$ — напруга магнітного поля, t — час, $c=\mathrm{const}$. Виключити з цих рівнянь електричне поле. Визначити, якому рівнянню задовольняє магнітне поле.

❍ Застосуємо до другого рівняння Максвелла операцію ротора, використавши доведену формулу:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \Delta\vec{a}\,.$$

В результаті одержимо

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{H} - \Delta\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{E}.$$

Відомо, що для магнітного поля $\operatorname{div}\vec{H} = 0$. В праву частину останньої рівності замість $\operatorname{rot}\vec{E}$ підставимо вираз з першого рівняння Максвелла, тоді маємо

$$-\Delta\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}.$$

Одержали хвильове рівняння для $\vec{H}$:

$$\Delta\vec{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0. \bullet$$

Навчальна задача 9.5. Виключити з рівнянь Максвелла магнітне поле. Записати рівняння для електричного поля.

❍ Відомо, що для електричного поля $\operatorname{div}\vec{E} = 0$. Застосуємо операцію ротора до першого рівняння Максвелла:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{H}.$$

Застосуємо відому формулу для $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E}$, матимемо

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E} - \Delta\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{H}.$$

Враховуючи, що $\operatorname{div}\vec{E} = 0$, а з другого рівняння Максвелла $\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, остання рівність перепишеться так:

$$-\Delta\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}.$$

Остаточно маємо

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0. \bullet$$

Навчальна задача 9.6. Знайти $\Delta\vec{a}$, якщо $\vec{a} = 3z\left(x^2 + y^2\right)\vec{i} - 2y\left(x^2 + z^2\right)\vec{j} + 4x\left(y^2 + z^2\right)\vec{k}$.

❍ Якщо $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ — векторне поле, то

$$\Delta\vec{a} = \Delta P\vec{i} + \Delta Q\vec{j} + \Delta R\vec{k}.$$

Для нашої умови

$$P(x,y,z)=3z\left(x^2+y^2\right), Q(x,y,z)=-2y\left(x^2+z^2\right),$$
$$R(x,y,z)=4x\left(y^2+z^2\right).$$

Тоді

$$\Delta P=\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}, \Delta Q=\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2},$$
$$\Delta R=\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 R}{\partial z^2};$$
$$\frac{\partial P}{\partial x}=6xz, \frac{\partial P}{\partial y}=6yz, \frac{\partial P}{\partial z}=3\left(x^2+y^2\right),$$
$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=6z, \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=6z, \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}=0, \Delta P=12z;$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-4yx, \frac{\partial Q}{\partial y}=-2\left(x^2+z^2\right), \frac{\partial Q}{\partial z}=-4yz,$$
$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}=-4y, \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}=0, \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}=-4y, \Delta Q=-8y;$$
$$\frac{\partial R}{\partial x}=4\left(y^2+z^2\right), \frac{\partial R}{\partial y}=8xy, \frac{\partial R}{\partial z}=8xz,$$
$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}=0, \frac{\partial^2 R}{\partial y^2}=8x, \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}=8x, \Delta R=16x.$$

Отже, маємо

$$\Delta\vec{a}=12z\vec{i}-8y\vec{j}+16x\vec{k}=4\left(3z\vec{i}-2y\vec{j}+4x\vec{k}\right).\bullet$$

Навчальна задача 9.7. Для векторного поля $\vec{a}=xy\vec{i}-yz\vec{j}+(\ln z)\vec{k}$ знайти $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a}$.

❍Знайдемо дивергенцію векторноо поля $\vec{a}$:

$$\operatorname{div}\vec{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial\left(xy\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(yz\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\ln z\right)}{\partial z}=$$
$$=y-z+\frac{1}{z}.$$

Тоді

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a}=\operatorname{grad}\left(y-z+\frac{1}{z}\right)=\frac{\partial\left(y-z+\frac{1}{z}\right)}{\partial x}\vec{i}+$$
$$+\frac{\partial\left(y-z+\frac{1}{z}\right)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\left(y-z+\frac{1}{z}\right)}{\partial z}\vec{k}=\vec{j}-\left(1+\frac{1}{z^2}\right)\vec{k}.$$

Отже,

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a}=\vec{j}-\frac{z^2+1}{z^2}\vec{k}.\bullet$$

Навчальна задача 9.8. Для векторного поля $\vec{a} = (x - y)\vec{i} + xy\vec{j} - yz^2\vec{k}$ знайти $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a}$.

❍Знайдемо ротор векторного поля $\vec{a}$:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x - y & xy & -yz^2 \end{vmatrix} = \left(-z^2\right)\vec{i} + (y + 1)\vec{k}.$$

Тоді

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = \frac{\partial\left(-z^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial(y + 1)}{\partial z} = 0.●$$

Навчальна задача 9.9. Знайти $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a}$ векторного поля $\vec{a} = \left(x^2 + y^2\right)\vec{i} + x^2y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$.

Знайдемо спочатку $\operatorname{rot}\vec{a}$:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + y^2 & x^2y^2 & z^2 \end{vmatrix} = 0 \cdot \vec{i} - 0 \cdot \vec{j} + \left(2xy^2 - 2y\right)\vec{k}.$$

Далі знаходимо

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & 2xy^2 - 2y \end{vmatrix} = (4xy - 2)\vec{i} - 2y^2\vec{j}.$$

Отже,

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} = 2(2xy - 1)\vec{i} - 2y^2\vec{j}.●$$

2. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 9.1. Довести рівність

$$\operatorname{grad}\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left(\vec{a}, \vec{\nabla}\right)\vec{b} + \left(\vec{b}, \vec{\nabla}\right)\vec{a} + \left[\vec{a}, \operatorname{rot}\vec{b}\right] + \left[\vec{b}, \operatorname{rot}\vec{a}\right]$$

.

Задача 9.2. Показати, що

$$\frac{1}{2}\operatorname{grad}\vec{a}^2 = \left(\vec{a}, \vec{\nabla}\right)\vec{a} + [\vec{a}, \operatorname{rot}\vec{a}].$$

Задача 9.3. Знайти $\operatorname{grad}(\vec{c}, \vec{a})$, де $\vec{c}$ — сталий вектор.

❍ $\left(\vec{c}, \vec{\nabla}\right)\vec{a} + [\,\vec{c}, \operatorname{rot}\vec{a}\,]$.●

Задача 9.4. Знайти $\operatorname{div}\operatorname{grad} u$, якщо $u = xy^2z^3$.

❍ $2xz\left(z^2 + 3y^2\right)$.●

Задача 9.5. Знайти $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u$, якщо $u = xz^2\ln y + x^2y\sqrt{z}$.

❍ $\vec{0}$.●

Задача 9.6. Для векторного поля $\vec{a} = (2xy + z)\vec{i} + \left(x^2 - 2y\right)\vec{j} + x\vec{k}$ знайти $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a}$.

❍ $2\vec{j}$.