# Лекція 8. Ротор векторного поля. Формула Стокса у векторній формі

**Короткий зміст**

## Короткий зміст

У цій лекції:

— впроваджено означення ротора векторного поля;
— розглянуто його властивості та фізичний зміст;
— записано формулу Стокса у векторній формі.

## 8.1. Поняття ротора векторного поля

### 8.1.1. Поняття ротора векторного поля

Розглянемо поле вектора

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k},$$

де функції $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ неперервні і мають неперервні частинні похідні першого порядку за всіма аргументам.

**_Означення 8.1._** *Ротором (вихором) векторного поля*

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

називають вектор, що позначають $\operatorname{rot}\vec{a}$ і визначають рівністю

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \qquad (8.1)$$

або в символічному вигляді

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \cdots \\ P & \cdots \end{vmatrix}$$

Символічний визначник розкривають за елементами першого рядка, при цьому операції множення елементів другого рядка на елементи третього рядка розуміють як операції диференціювання, приміром, $\dfrac{\partial}{\partial x}\cdot Q = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, а

$$\vec{i}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\cdot R - \frac{\partial}{\partial z}\cdot Q\right) = \vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right).$$

**_Означення 8.2._** Якщо $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$ в деякій області $\Omega$, то поле вектора $\vec{a}$ називають *безвихровим* в цій області.

### 8.1.2. Формула Стокса у векторній формі

Нагадаємо, що формула Стокса встановлює зв‘язок між криволінійним інтегралом другого роду вздовж замкненої кривої та поверхневим інтегралом по поверхні, обмеженій цим контуром.

Використовуючи означення (8.1) ротора вектора $\vec{a}$, можна записати формулу Стокса (7.2) у векторній формі:

$$\oint\limits_{\Gamma}\left(\vec{a},\vec{\tau}^{\,0}\right)dl = \iint\limits_{\Sigma}\left(\operatorname{rot}\vec{a},\vec{n}^{\,0}\right)d\sigma. \qquad (8.2)$$

Таким чином, циркуляція вектора $\vec{a}$ вздовж орієнтованого замкненого контуру $\Gamma$ дорівнює потоку ротора цього вектора через довільну поверхню $\Sigma$, напнуту на цей контур:

$$C = \iint_{\Sigma} \left( \operatorname{rot} \vec{a}, \vec{n}^0 \right) d\sigma \tag{8.3}$$

***Приклад 8.1.*** За формулою Стокса обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} - z\vec{j} + y\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma$, отриманого при перетині поверхні $y^2 = 4 - x - z$ з координатними площинами.

❍ 1) Контур $\Gamma$ є кусково-гладкою кривою, яка складається з трьох частин: парабол $y^2 = 4 - x$, $y^2 = 4 - z$ в площинах $Oxy$ і $Oyz$ відповідно, і відрізку прямої $x + z = 4$ на площині $Oxz$ (рис. 8.1).

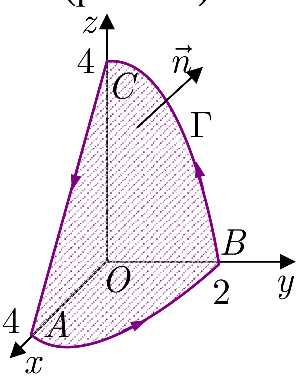


Рис. 8.1

Для обчислення циркуляції за формулою Стокса знайдемо $\operatorname{rot}\vec{a}$, $\vec{n}^0$ і $d\sigma$ для поверхні $z = 4 - x - y^2$, напнутої на контур $\Gamma$:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & -z & y \end{vmatrix} = 2\vec{i};$$

$$\vec{n} = (1;2y;1),\ |\vec{n}| = \sqrt{1 + 4y^2 + 1} = \sqrt{4y^2 + 2} \Rightarrow \vec{n}^0 = \frac{(1;2y;1)}{\sqrt{4y^2 + 2}};$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy = \sqrt{4y^2 + 2}\,dxdy;$$

$$\left(\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{n}^0\right) = \frac{2}{\sqrt{4y^2 + 2}}.$$

Отже,

$$C = \iint_{\Sigma} \left(\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{n}^0\right) d\sigma = \iint_{Dxy} 2dxdy = 2\int_0^2 dy \int_0^{4-y^2} dx =$$

$$= 2\int_0^2 \left(4 - y^2\right) dy = 2\left(4y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}. \bullet$$

### 8.1.3. Інваріантне означення ротора

Означення (8.1) ротора вектора пов'язано з декартовою системою координат. Розглянемо інваріантне означення ротора.

Нехай $\Sigma$ — орієнтована плоска площадка з вектором нормалі $\vec{n}^0$, а контур $\Gamma$ — її межа з вибраним на ньому напрямом обходу. Знайдемо відношення циркуляції вектора $\vec{a}$ до площі $S$ площадки:

$$\frac{\oint\limits_{\Gamma} (\vec{a}, \vec{\tau}^0) dl}{S}.$$

Воно характеризує середню густину циркуляції в одиниці площі. Границю цього відношення, коли $\Sigma$ стягується в точку $M \in \Sigma$, називають *густиною циркуляції* $j(M)$ в точці $M$ в напрямі вектора $\vec{n}^0$. Отже, густина циркуляції

$$j(M) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\Sigma \to M} \frac{\oint\limits_{\Gamma} (\vec{a}, \vec{\tau}^0) dl}{S}. \tag{8.4}$$

Застосуємо формулу Стокса до правої частини рівності (8.4), одержимо

$$j(M) = \lim_{\Sigma \to M} \frac{\iint\limits_{\Sigma} \left(\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{n}^0\right) d\sigma}{S}.$$

За теоремою про середнє для поверхневих інтегралів маємо

$$j(M) = \lim_{M_{ср} \to M} \frac{(\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{n}^0)\Big|_{M_{ср}} \cdot S}{S} = (\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{n}^0)\Big|_{M},$$

де $M_{ср}$ — деяка середня точка на $\Sigma$. Але $(\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{n}^0) = np_{\vec{n}^0} \operatorname{rot} \vec{a}$. Таким чином,

$$j(M) = np_{\vec{n}^0} \operatorname{rot} \vec{a}.$$

Якщо $\operatorname{rot} \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{n}^0$, то

$$j(M)_{\max} = \left|\operatorname{rot} \vec{a}(M)\right|, \tag{8.5}$$

тобто найбільша густина циркуляції в деякій точці дорівнює модулю ротора векторного поля $\vec{a}$ в цій точці.

**Означення 8.3.** (*Інваріантне означення ротора.*) Ротор поля $\vec{a}$ — це вектор, довжина якого дорівнює найбільшій поверхневій густині циркуляції в даній точці, напрямлений перпендикулярно до площадки, на якій найбільша густина досягається, орієнтація $\operatorname{rot} \vec{a}$ узгоджується з орієнтацією контуру за правилом правого гвинта.

***Приклад 8.2.*** Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля $\vec{a} = \left(\frac{y}{z}; \frac{z}{x}; \frac{x}{y}\right)$ в точці $M_0\left(1; 2; -2\right)$.

❍ Найбільша густина циркуляції за формулою (8.5) дорівнює

$$j(M)_{\max} = \left|\operatorname{rot}\vec{a}(M)\right|.$$

Знайдемо ротор векторного поля $\vec{a}$ в точці $M_0$:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{y}{z} & \dfrac{z}{x} & \dfrac{x}{y} \end{vmatrix} = \vec{i}\left(-\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}\right) - \vec{j}\left(\frac{1}{y} + \frac{y}{z^2}\right) + \vec{k}\left(-\frac{z}{x^2} - \frac{1}{z}\right),$$

$$\operatorname{rot}\vec{a}\left(M_0\right) = -\frac{5}{4}\vec{i} - \vec{j} + \frac{5}{2}\vec{k}.$$

Тоді

$$j(M_0)_{\max} = \left|\operatorname{rot}\vec{a}\left(M_0\right)\right| = \sqrt{\frac{25}{16} + 1 + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{141}}{4}. \bullet$$

### 8.1.4. Фізичний зміст ротора поля

З'ясуємо фізичний зміст ротора на прикладі поля швидкостей точки, що обертається навколо деякої осі.

Нехай тверде тіло обертається навколо нерухомої осі $l$ з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ (рис. 8.2).

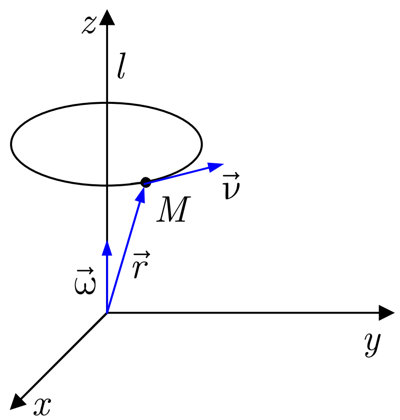


Рис. 8.2

Тоді радіус-вектор точки $M(x; y; z)$:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Якщо вісь обертання співпадає з віссю $Oz$, то вектор кутової швидкості $\vec{\omega} = (0; 0; \omega)$. Вектор лінійної швидкості, як відомо з механіки, дорівнює $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$.

Таким чином,

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\omega\vec{i} + x\omega\vec{j}.$$

Звідси

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y\omega & x\omega & 0 \end{vmatrix} = 2\omega\vec{k} = 2\vec{\omega}.$$

Отже, ротор поля швидкостей твердого тіла, що обертається навколо осі, відмінний від нуля, однаковий в усіх точках поля, паралельний до осі обертання і дорівнює подвоєній швидкості обертання.

Тобто відмінний від нуля $\operatorname{rot}\vec{a}$ характеризує обертальний рух векторного поля $\vec{a}$.

## 8.2. Правила обчислення ротора

***Властивість 1*** (Лінійність.)

$$\operatorname{rot}(c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_n\vec{a}_n) = c_1 \operatorname{rot}\vec{a}_1 + \ldots + c_n \operatorname{rot}\vec{a}_n,$$

де $c_1, \ldots, c_n$ — сталі числа.

***Властивість 2*** Ротор сталого вектора дорівнює нулю: $\operatorname{rot}\vec{c} = 0$.

Доведення властивостей 1, 2 випливають з означення ротора і властивостей частинних похідних.

***Властивість 3*** Ротор добутку скалярної функції $u(M)$ на вектор $\vec{a}(M)$ обчислюється за формулою

$$\operatorname{rot}(u\vec{a}) = u \operatorname{rot}\vec{a} + [\operatorname{grad} u, \vec{a}]. \tag{8.6}$$

► За означенням ротора маємо

$$\operatorname{rot}(u\vec{a}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ uP & uQ & uR \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(uR)}{\partial y} - \frac{\partial(uQ)}{\partial z}\right)\vec{i} +$$

$$+\left(\frac{\partial(uP)}{\partial z} - \frac{\partial(uR)}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial(uQ)}{\partial x} - \frac{\partial(uP)}{\partial y}\right)\vec{k} =$$

$$= u\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P)}{\partial y}\right)\vec{k}\right]+$$

$$+\left[\left(R\frac{\partial u}{\partial y}-Q\frac{\partial u}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(P\frac{\partial u}{\partial z}-R\frac{\partial u}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(Q\frac{\partial u}{\partial x}-P\frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}\right]=$$

$$= u\operatorname{rot}\vec{a}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}= u\operatorname{rot}\vec{a}+\left[\operatorname{grad}u,\vec{a}\right].◄$$

***Властивість 4*** $\operatorname{rot}(u\vec{c})=\left[\operatorname{grad}u,\vec{c}\right]$, де $\vec{c}$ — сталий вектор.

Доведення випливає з властивостей 2 і 3.

***Приклад 8.3.*** Знайти ротор векторного поля $\vec{H}$ — поля магнітної напруженості лінійного струму

$$\vec{H}=\frac{2I}{x^2+y^2}\left(-y\vec{i}+x\vec{j}\right).$$

❍Для знаходження ротора вектора $\vec{H}$ скористаємось властивістю 3 ротора. Покладемо у формулі (8.6)

$$u=\frac{2I}{x^2+y^2},\ \vec{a}=-y\vec{i}+x\vec{j}.$$

Тоді

$$\operatorname{rot}\vec{H}=\operatorname{rot}\left(u\vec{a}\right)=u\operatorname{rot}\vec{a}+\left[\operatorname{grad}u,\vec{a}\right].$$

Знайдемо:

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\operatorname{rot}(-y\vec{i}+x\vec{j})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -y & x & 0\end{vmatrix}=0\cdot\vec{i}-0\cdot\vec{j}+2\vec{k}=2\vec{k},$$

$$\operatorname{grad}u=\operatorname{grad}\left(\frac{2I}{x^2+y^2}\right)=-\frac{4Ix}{\left(x^2+y^2\right)^2}\vec{i}-\frac{4Iy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\vec{j},$$

$$\left[\operatorname{grad}u,\vec{a}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -\dfrac{4Ix}{\left(x^2+y^2\right)^2} & -\dfrac{4Iy}{\left(x^2+y^2\right)^2} & 0\\ -y & x & 0\end{vmatrix}=$$

$$= \left( -\frac{4Ix^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} - \frac{4Iy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \right) \vec{k} = -\frac{4I}{x^2+y^2} \vec{k},$$

с

Підставимо знайдені вирази у формулу для $\operatorname{rot} \vec{H}$, отримаємо

$$\operatorname{rot} \vec{H} = u \operatorname{rot} \vec{a} + \left[ \operatorname{grad} u, \vec{a} \right] = \frac{2I}{x^2+y^2} \cdot 2\vec{k} - \frac{4I}{x^2+y^2} \vec{k} = \vec{0}.$$

Отже, поле магнітної напруженості лінійного струму безвихрове.●

Таким чином, $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{0}$ скрізь, крім вісі $Oz$, в точках якої знаменник перетворюється на нуль.

Якщо вісь $Oz$ проходить через область, обмежену кривою, то циркуляція не залежить від вигляду кривої, бо через дві криві, що обмежують дріт $Oz$, можна провести поверхню, на якій $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{0}$. Тому, для обчислення циркуляції вектора $\vec{H}$ вздовж довільної замкненої кривої достатньо взяти коло $L_1$ радіусом $R$ з центром на осі $Oz$, площина якого перпендикулярна дроту. На такому колі $\rho = \sqrt{x^2+y^2} = R$ і $\vec{H} = \frac{2I}{R^2}\left( -y\vec{i} + x\vec{j} \right)$.

Тому

$$\oint_{L_1} \vec{H} d\vec{r} = \frac{2I}{R^2} \oint_{L_1} -y dx + x dy = \frac{4I}{R^2} \cdot \pi R^2 = 4\pi I. \tag{8.7}$$

Таким чином, циркуляція вектора напруженості $\vec{H}$ магнітного поля, що утворюється електричним струмом сили $I$, що тече вздовж нескінченного прямолінійного дроту, або дорівнює нулеві, або є сталою величиною $4\pi I$, кола замкнена крива, вздовж якої знаходять циркуляцію, оточує дріт.