

1. Розв'язання навчальних задач

**Навчальна
задача 7.1.**

Знайти ротор векторного поля
 $\vec{a} = (x^2 + y^2)\vec{i} + x^2y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$.

○ Скористаємось формулою (44.3):

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + y^2 & x^2y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \vec{i}(0 - 0) - \vec{j}(0 - 0) + \vec{k}(2xy^2 - 2y).$$

Таким чином,

$$\operatorname{rot} \vec{a} = 2y(xy - 1)\vec{k}. \bullet$$

**Навчальна
задача 7.2.**

Знайти величину і напрям ротора векторного поля
 $\vec{a} = xyz(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$ в точці $M_0(-1; 0; 2)$.

○ За означенням ротора маємо

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{a} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2yz & xy^2z & xyz^2 \end{vmatrix} = \vec{i}(xz^2 - xy^2) - \vec{j}(yz^2 - yx^2) + \\ &+ \vec{k}(zy^2 - zx^2) = x(z^2 - y^2)\vec{i} + y(x^2 - z^2)\vec{j} + z(y^2 - x^2)\vec{k}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\operatorname{rot} \vec{a}(M_0) = -4\vec{i} - 2\vec{k}, |\operatorname{rot} \vec{a}(M_0)| = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}. \bullet$$

**Навчальна
задача 7.3.**

Довести справедливість формули
 $\operatorname{div}[\vec{a}_1, \vec{a}_2] = (\vec{a}_2, \operatorname{rot} \vec{a}_1) - (\vec{a}_1, \operatorname{rot} \vec{a}_2)$.

○ Нехай в декартових координатах $\vec{a}_1 = P_1\vec{i} + Q_1\vec{j} + R_1\vec{k}$,
 $\vec{a}_2 = P_2\vec{i} + Q_2\vec{j} + R_2\vec{k}$. Тоді

$$\begin{aligned} [\vec{a}_1, \vec{a}_2] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P_1 & Q_1 & R_1 \\ P_2 & Q_2 & R_2 \end{vmatrix} = \vec{i}(Q_1R_2 - Q_2R_1) - \vec{j}(P_1R_2 - P_2R_1) + \\ &+ \vec{k}(P_1Q_2 - P_2Q_1). \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}[\vec{a}_1, \vec{a}_2] &= \frac{\partial}{\partial x}(Q_1 R_2 - R_1 Q_2) + \frac{\partial}{\partial y}(R_1 P_2 - P_1 R_2) + \frac{\partial}{\partial z}(P_1 Q_2 - Q_1 P_2) = \\
&= \frac{\partial Q_1}{\partial x} R_2 - \frac{\partial R_1}{\partial x} Q_2 + \frac{\partial R_2}{\partial x} Q_1 - \frac{\partial Q_2}{\partial x} R_1 + \frac{\partial R_1}{\partial y} P_2 - \frac{\partial P_1}{\partial y} R_2 + \\
&+ \frac{\partial P_2}{\partial y} R_1 - \frac{\partial R_2}{\partial y} P_1 + \frac{\partial P_1}{\partial z} Q_2 - \frac{\partial Q_1}{\partial z} P_2 + \frac{\partial Q_2}{\partial z} P_1 - \frac{\partial P_2}{\partial z} Q_1 = \\
&= \left[P_2 \left(\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} \right) + Q_2 \left(\frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x} \right) + R_2 \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} \right) \right] - \\
&- \left[P_1 \left(\frac{\partial R_2}{\partial y} - \frac{\partial Q_2}{\partial z} \right) + Q_1 \left(\frac{\partial P_2}{\partial z} - \frac{\partial R_2}{\partial x} \right) + R_1 \left(\frac{\partial Q_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial y} \right) \right] = \\
&= (\vec{a}_2, \operatorname{rot} \vec{a}_1) - (\vec{a}_1, \operatorname{rot} \vec{a}_2). \bullet
\end{aligned}$$

**Навчальна
задача 7.4.**

Знайти ротор векторного поля $[\vec{a}, \vec{c}]$, де
 $\vec{a} = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} - x^2 \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

○ Оскільки

$$[\vec{a}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x^2 & y^2 & -x^2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}(2y^2 - x^2) - \vec{j} \cdot 3x^2 - \vec{k}(x^2 + y^2),$$

то

$$\operatorname{rot}[\vec{a}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y^2 - x^2 & -3x^2 & -x^2 - y^2 \end{vmatrix} = -2y\vec{i} + 2x\vec{j} - (6x + 4y)\vec{k}. \bullet$$

**Навчальна
задача 7.5.**

Обчислити циркуляцію векторного поля
 $\vec{a} = 3x\vec{i} - 2y\vec{j} + z^2\vec{k}$ вздовж кола $\Gamma: x^2 + y^2 = 4, z = 1$,
орієнтованого проти годинникової стрілки, якщо дивитись з додатного напрямку осі Oz :

- 1) безпосередньо;
- 2) за формулою Стокса.

○ 1) За означенням циркуляції векторного поля

$$\text{Ц} = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz.$$

Для обчислення криволінійного інтеграла другого роду запишемо рівняння контура (рис. 7.1) в параметричному вигляді

$$x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad z = 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

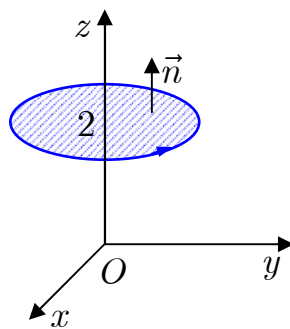


Рис. 7.1

Тоді

$$\begin{aligned} \text{Ц} &= \oint_{\Gamma} 3xdx - 2ydy + z^2dz = \left. \begin{array}{l} dx = -2 \sin t dt \\ dy = 2 \cos t dt \\ dz = 0 \end{array} \right| = \\ &= \int_0^{2\pi} (-12 \cos t \sin t - 8 \sin t \cos t) dt = -20 \int_0^{2\pi} \sin t d(\sin t) = \\ &= -20 \cdot \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

2) Обчислимо інтеграл за формулою Стокса

$$\text{Ц} = \iint_{\sigma} (\text{rot } \vec{a}, \vec{n}^0) d\sigma.$$

За поверхню σ , напнуту на контур Γ , візьмемо частину площини $z = 1$, обмежену цим контуром. Орт вектора нормалі до поверхні $\vec{n}^0 = \vec{k} = (0; 0; 1)$, оскільки це забезпечує необхідну орієнтацію контура Γ . Тоді

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{a} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x & -2y & z^2 \end{vmatrix} = \vec{i}(0-0) - \vec{j}(0-0) + \vec{k}(0-0) = 0. \\ (\text{rot } \vec{a}, \vec{n}^0) &= (0; 0; 0) \cdot (0; 0; 1) = 0. \end{aligned}$$

Отже,

$$\text{Ц} = \iint_{\sigma} 0 \cdot d\sigma = 0. \bullet$$

**Навчальна
задача 7.6.**

Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a} = -2y\vec{i} + x\vec{j} - (z^2 + 1)\vec{k}$ вздовж контура

$\Gamma : x^2 + y^2 = z, z = 9$, орієнтованого додатно:

- 1) безпосередньо;
- 2) за формулою Стокса.

○ Контур Γ є колом, утвореним перетином параболоїда $z = x^2 + y^2$ і площини $z = 9$ (рис. 7.2).

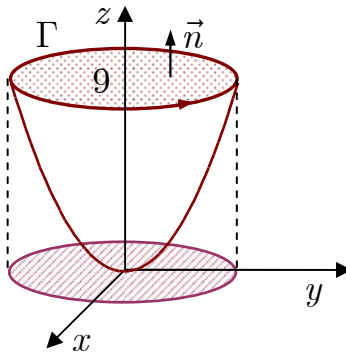


Рис. 7.2

1) Запишемо параметричні рівняння кола

$$x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, z = 9, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \text{Ц} &= \oint_{\Gamma} -2ydx + xdy - (z^2 + 1)dz = \begin{vmatrix} dx = -3 \sin t dt \\ dy = 3 \cos t dt \\ dz = 0 \end{vmatrix} = \\ &= \int_0^{2\pi} (18 \sin^2 t + 9 \cos^2 t) dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (9 + 9 \sin^2 t) dt = \\ &= 18\pi + 36 \cdot \frac{1!!}{2!!} \cdot \frac{\pi}{2} = 18\pi + 9\pi = 27\pi. \end{aligned}$$

2) Обчислимо ротор векторного поля \vec{a}

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -2y & x & -(z^2 + 1) \end{vmatrix} = \vec{i}(0 - 0) - \vec{j}(0 - 0) + \vec{k}(1 + 2) = 3\vec{k}.$$

За поверхню, напнуту на контур Γ , візьмемо частину площини $z = 9$, що міститься всередині контура Γ і орієнтовану в напрямі вектора $\vec{n}^0 = \vec{k} = (0; 0; 1)$. Проекцією D_{xy} поверхні σ на площину Oxy буде круг $x^2 + y^2 \leq 9$.

Тоді

$$\text{Ц} = 3 \iint_{\sigma} dx dy = 3 \iint_{D_{xy}} dx dy = 3 \cdot S = 3 \cdot 9\pi = 27\pi,$$

де S — площа круга D_{xy} . ●

задача 7.7.

$\oint_{\Gamma} y^2 dx - x^2 dy + z^2 dz$, де Γ — замкнений контур, утворений при перетині параболоїда $1 - y = x^2 + z^2$ з координатними площинами.

○ Тут

$$P(x, y, z) = y^2, Q(x, y, z) = -x^2, R(x, y, z) = z^2,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2x - 2y, \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0.$$

За поверхню σ , напнуту на контур Γ , візьмемо поверхню параболоїда $1 - y = x^2 + z^2$. Побудуємо проекцію частини поверхні $1 - y = x^2 + z^2$, що лежить в першому октанті на площину Oxy (рис. 7.3).

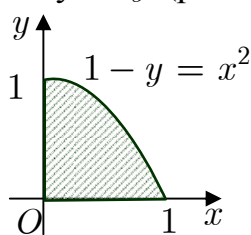


Рис. 7.3

Отже,

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} y^2 dx - x^2 dy + z^2 dz &= -2 \iint_{\sigma} (x + y) dx dy = -2 \iint_D (x + y) dx dy = \\ &= -2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} (x + y) dy = -2 \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x^2} dx = \\ &= -2 \int_0^1 \left(x - x^3 + \frac{1 - 2x^2 + x^4}{2} \right) dx = -2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} \right) \Big|_0^1 = \\ &= -2 \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \right) = \frac{-45 + 20 - 6}{30} = -\frac{31}{30}. \bullet \end{aligned}$$

2. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 7.1.

Обчислити ротор заданих векторних полів

1) $\vec{a} = xy\vec{i} - xz\vec{j} + yz\vec{k}$;

2) $\vec{a} = \arctg(x - y + z)(\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k})$;

3) $\vec{a} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j} + z^2\vec{k}$.

○ 1) $(x + z)(\vec{i} - \vec{k})$; 2) $\frac{5\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}}{1 + (x - y + z)^2}$; 3) $-2(x + y)\vec{k}$. •

Задача 7.2.

Показати, що векторне поле

$\vec{a} = f(\rho)(x\vec{i} + y\vec{j})$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ є безвихорним при довільній функції $f(\rho)$.

Задача 7.3.

Застосовуючи формулу Стокса, обчислити інтеграл $\oint_{\Gamma} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, де Γ — контур трикутника ABC з вершинами $A(a; 0; 0)$, $B(0; a; 0)$, $C(0; 0; a)$. Результат перевірити безпосереднім обчисленням криволінійного інтеграла.

○ $-a^3$. ●

Задача 7.4.

Застосовуючи формулу Стокса, обчислити інтеграл $\oint_{\Gamma} (y-x) dx + (2x-y) dy + z dz$, де Γ — контур, що складається з відрізків осей Ox і Oy і дуги кола $x = 3 \cos t$, $y = 3 \sin t$, $z = 0$ $\left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$. Результат перевірити безпосереднім обчисленням криволінійного інтеграла.

○ $\frac{9\pi}{4}$. ●

Задача 7.5.

Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (z-y)\vec{i} + (x-z)\vec{j} + (y-x)\vec{k}$ вздовж контура $\Gamma : \{x^2 + z^2 = R^2, y = 1\}$ двома способами: безпосередньо і за формулою Стокса.

○ 0. ●

Задача 7.6.

Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (z^2 - x^2)\vec{i} + (x^2 - y^2)\vec{j} + (y^2 - z^2)\vec{k}$ вздовж контура $\Gamma : \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = z^2\}$ двома способами: безпосередньо і за формулою Стокса.

○ 0. ●

Задача 7.7.

Перевірити формулу Стокса для функцій $P = y^2 + z^2$, $Q = z^2 + x^2$, $R = x^2 + y^2$, якщо σ — зовнішня сторона поверхні, яку вирізає циліндр $x^2 + y^2 = 2x$ із сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ ($z > 0$).

○ 4π . ●