Лекція 7. Циркуляція векторного поля. Формула Стокса

Короткий зміст

Короткий зміст

У цій лекції:

— означено поняття циркуляції векторного поля;

— доведено формулу Стокса для знаходження циркуляції вектора вздовж замкненого контуру.

7.1. Поняття циркуляції векторного поля

Нехай в деякій області $V \subset \mathbb{R}^3$ задано неперервне векторне поле

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

і замкнений кусково-гладкий орієнтований контур Γ.

Означення 7.1. *Циркуляцією вектора* (*векторного поля*) $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ вздовж замкненого контуру Γ називають криволінійний інтеграл другого роду від вектора $\vec{a}$ по контуру Γ

$$C = \oint_{\Gamma} \left(\vec{a}, d\vec{r}\right) = \oint_{\Gamma} \left(\vec{a}, \vec{\tau}^{\,0}\right) dl = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz. \quad (7.1)$$

Вектор $\vec{\tau}^{\,0}$ — одиничний вектор дотичної до контуру Γ, що вказує напрям руху вздовж контуру, символ $\oint\limits_{\Gamma}$ означає інтегрування вздовж замкненого контуру.

Якщо $\vec{a}$ — вектор сили (силове поле), то циркуляція (7.1) є роботою даної сили вздовж замкненого контуру Γ. В цьому полягає *фізичний зміст* циркуляції.

7.2. Формула Стокса

Нехай Γ — замкнений кусково-гладкий орієнтовний контур в $\mathbb{R}^3$, Σ — гладка поверхня, напнута на контур Γ. Тоді справедлива наступна теорема.

Теорема 7.1. Нехай в околі поверхні Σ задано векторне поле $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, координатні функції P, Q, R якої неперервні разом із своїми частинними похідними в цьому околі. Тоді справедлива *формула Стокса*

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy, \quad (7.2)$$

де орієнтація орта нормалі $\vec{n}^{\,0}$ до поверхні Σ узгоджена з орієнтацією контуру Γ так, що з кінця нормалі обхід контуру в заданому напрямі відбувається проти руху стрілки годинника.

► Нехай поверхня Σ однозначно проектується на область D_{xy} площини Oxy, Γ — контур, який обмежує Σ, а γ — проекція контуру Γ на площину Oxy, тобто γ — межа області D_{xy}. Тоді поверхню можна задати рівнянням $z = z(x,y)$. Виберемо верхню сторону поверхні (рис. 7.1).

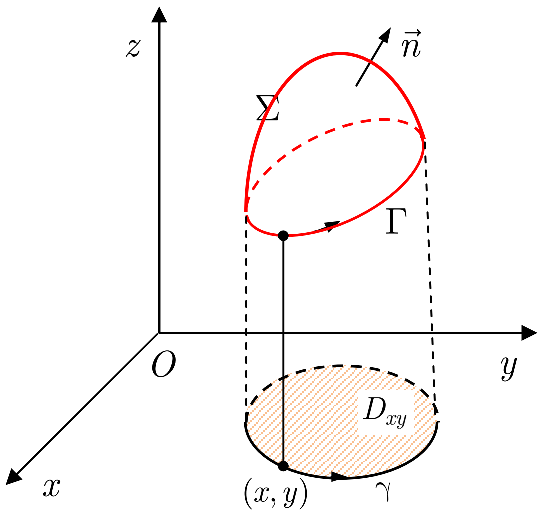

Рис. 7.1

Розглянемо інтеграл $\oint\limits_{\Gamma} P(x,y,z)dx$.

Значення функції $P(x,y,z)$ на контурі Γ дорівнює значенню функції $P(x,y,z(x,y))$ у відповідних точках контуру γ. Звідси випливає, що

$$\oint\limits_{\Gamma} P(x,y,z)dx = \oint\limits_{\gamma} P(x,y,z(x,y))dx.$$

Застосуємо до останнього інтеграла формулу Гріна, дістанемо

$$\oint\limits_{\gamma} P(x,y,z(x,y))dx = \iint\limits_{D_{xy}} -\frac{\partial}{\partial y}\big[P(x,y,z(x,y))\big]dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} -\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot z'_y\right)dxdy.$$

Перейдемо від подвійного інтеграла по області D_{xy} до поверхневого інтеграла по поверхні Σ, враховуючи метод проекції на одну координатну площину:

$$\iint\limits_{D_{xy}} -\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot z'_y\right)dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} -\frac{\partial}{\partial y}\big(P(x,y,z(x,y)\big)dxdy -$$

$$-\iint\limits_{D_{xy}} \frac{\partial}{\partial z}\big(P(x,y,z(x,y)\big)\cdot z'_y\,dxdy = \iint\limits_{\Sigma} -\frac{\partial P}{\partial y}dxdy + \iint\limits_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial z}dxdz.$$

Отже,

$$\oint\limits_{\Gamma} P(x,y,z)dx = \iint\limits_{\Sigma} -\frac{\partial P}{\partial y}dxdy + \iint\limits_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial z}dxdz.$$

Аналогічно доводиться, що при відповідних умовах

$$\oint\limits_{\Gamma} Q(x,y,z)dx = \iint\limits_{\Sigma} -\frac{\partial Q}{\partial z}dydz + \iint\limits_{\Sigma} \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy,$$

$$\oint\limits_{\Gamma} R(x,y,z)dx = \iint\limits_{\Sigma} -\frac{\partial R}{\partial x}dxdz + \iint\limits_{\Sigma} \frac{\partial R}{\partial y}dydz.$$

Додаючи почленно останні три рівності, дістаємо формулу Стокса (7.2).◄

Зауваження 7.1. 1. Формула Стокса встановлює зв'язок між криволінійними інтегралами другого роду вздовж замкненого контуру і поверхневими інтегралами другого роду по поверхні, обмеженій цим контуром.
2. Формула (7.2) виводилась у припущенні, що поверхня однозначно проектується на всі координатні площини. Якщо ця умова не виконана, то поверхню розбивають на частини, кожна з яких проектується на координатні площини однозначно, а потім користуються адитивністю поверхневого інтеграла.
3. В доведенні формули Стокса вигляд поверхні Σ, обмеженої контуром Γ, ніде не використовувався, важливою є тільки орієнтація поверхні в просторі. Тому при розв'язанні практичних задач поверхня Σ вибирається такою, щоб поверхневий інтеграл по ній обчислювався найбільш зручним способом.

Нехай тепер Γ — замкнена крива на площині Oxy, а Σ — область D, обмежена цією кривою. В такому випадку $dz = 0$, а вектор нормалі до області D має вигляд $\vec{n} = (0;0;1)$. Тоді з рівності (7.2) одержимо формулу Гріна. Таким чином, формула Гріна — частинний випадок формули Стокса у разі плоскої кривої.

Приклад 7.1. Обчислити циркуляцію вектора $\vec{a} = x^2y^3\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$ вздовж кола $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$
1) безпосередньо;
2) за формулою Стокса.
Обхід контура відбувається в додатному напрямі.

❍1) Контур Γ — коло на площині $z = 0$ (рис. 7.2).

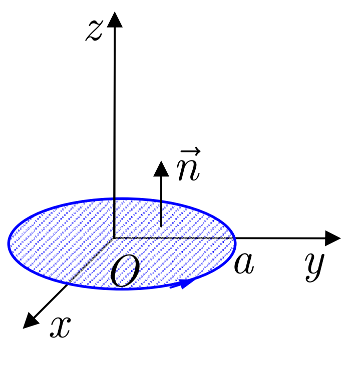

Рис.7.2

Задамо контур Γ параметрично:

$$\Gamma = \left\{x = a\cos t, y = a\sin t, z = 0, 0 \le t \le 2\pi\right\}.$$

Тоді

$$dx = -a\sin t dt, dy = a\cos t dt, dz = 0.$$

Знайдемо циркуляцію вектора $\vec{a} = x^2y^3\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$ вздовж контуру Γ:

$$C = \oint_{\Gamma} x^2y^3dx + dy + zdz = \int_0^{2\pi}\left(a^2\cos^2 t\cdot a^3\sin^3 t\cdot(-a\sin t) + a\cos t\right)dt =$$

$$= -a^6\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^4 t dt + a\sin t\Big|_0^{2\pi} = -4a^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 t)\sin^4 t dt =$$

$$= -4a^6\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t dt\right) = -4a^6\left(\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{5!!}{6!!}\cdot\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= -2\pi a^6\left(\frac{3}{8} - \frac{15}{48}\right) = -\frac{\pi a^6}{8}.$$

При знаходженні значення інтеграла використовувалась формула Валліса:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k} t dt = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

2) Для обчислення циркуляції за формулою Стокса знайдемо

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 - 0 = 0, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 - 0 = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 - 3x^2y^2 = -3x^2y^2.$$

За поверхню, напнуту на контур Γ, візьмемо частину площини $z = 0$, тому $\vec{n}^0 = \vec{k}$. Тоді, за формулою (7.2) маємо

$$C = \iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy =$$

$$= -3\iint_{D_{xy}} x^2y^2dxdy = \begin{vmatrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ |J| = \rho \end{vmatrix} = -3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a \rho^2\cos^2\varphi\cdot\rho^2\sin^2\varphi\cdot\rho d\rho =$$

$$= -3\cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi\int_0^a \rho^5 d\rho = -12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\varphi\right)\sin^2\varphi d\varphi\cdot\frac{\rho^6}{6}\Big|_0^a =$$

$$= -2a^6\left(\frac{1!!}{2!!}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi a^6}{8}.\bullet$$