Лекція 6. Дивергенція векторного поля

Короткий зміст

У цій лекції:

— вказано зв’язок між потоком векторного поля і дивергенцією (розбіжністю) векторного поля;

— наведено правила обчислення дивергенції.

6.1. Поняття дивергенція векторного поля

6.1.1. Означення дивергенції векторного поля

Нехай Σ — замкнена поверхня в $\mathbb{R}^3$, $\vec{n}$ — зовнішня нормаль. Розглянемо поле швидкостей $\vec{v}$ течії рідини і обчислимо потік рідини через поверхню Σ. Якщо $\Pi > 0$, то це означає, що з тої частини простору, яка обмежена поверхнею Σ, витікає більше рідини, ніж утікає в неї. В цьому випадку всередині поверхні є *джерело* — місце, де рідина з'являється. Навпаки, якщо $\Pi < 0$, то всередину поверхні Σ утікає більше рідини, ніж витікає з неї. В цьому випадку кажуть, що всередині тіла, обмеженого поверхнею Σ є *стік* — місце, де рідина зникає.

Таким чином, величина

$$\Pi = \oiint\limits_{\Sigma} \left(\vec{a}, \vec{n}^0 \right) d\sigma$$

дозволяє з'ясувати питання про наявність джерел і стоків всередині поверхні Σ та їх потужність. Можна вважати, що джерела — це точки, звідки векторні лінії починаються, а стоки — точки, де векторні лінії закінчуються.

Поняття про потік векторного поля через замкнену поверхню приводить до поняття дивергенції, або розбіжності поля, яке дає кількісну характеристику джерел та стоків в кожній точці поля. Візьмемо точку M векторного поля, оточимо її тілом Ω, обмеженим поверхнею Σ, об'єм якого V. Обчислимо потік вектора $\vec{a}$ через поверхню Σ. Маємо

$$\Pi = \oiint\limits_{\Sigma} \left(\vec{a}, \vec{n}^0 \right) d\sigma .$$

Розглянемо відношення потоку Π до величини об'єму V

$$\frac{\oiint\limits_{\Sigma} \left(\vec{a}, \vec{n}^0 \right) d\sigma}{V} . \tag{6.1}$$

Це відношення характеризує середню густину джерел або стоків в одиниці об'єму.

Означення 6.1. Якщо існує скінченна границя відношення (6.3), коли область Ω стягується в точку M, то ця границя називається *дивергенцією* векторного поля $\vec{a}$ в точці M і позначається $\operatorname{div} \vec{a}(M)$.

Тобто за означенням

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\Omega \to M} \frac{\oiint\limits_{\Sigma} \left(\vec{a}, \vec{n}^0 \right) d\sigma}{V} . \tag{6.2}$$

Наведене означення не пов'язано з вибором системи координат, тому воно називається *інваріантним означенням дивергенції*.

Дивергенція векторного поля — це величина скалярна. Якщо $\operatorname{div} \vec{a}(M) > 0$ ($\operatorname{div} \vec{a}(M) < 0$), то в точці M знаходиться джерело (стік), якщо $\operatorname{div} \vec{a}(M) = 0$, то в точці M немає ні джерел, ні стоків. Таким чином, дивергенція поля $\vec{a}$ в точці M є об'ємною густиною потоку вектора $\vec{a}$ в цій точці.

Виведемо формулу обчислення дивергенції векторного поля в декартових координатах. Нехай

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k},$$

де функції $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ неперервні і мають неперервні частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ в деякому околі точки M. Тоді для знаходження потоку вектора $\vec{a}$ через довільну замкнену поверхню Σ, що оточує точку M, можна застосувати формулу Остроградського — Гауса

$$\oiint_{\Sigma} \left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) d\sigma = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV.$$

За теоремою про середнє для потрійного інтеграла одержимо

$$\oiint_{\Sigma} \left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) d\sigma = \left.\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\right|_{M_{cp}} \cdot V.$$

Підставляючи одержаний вираз у формулу для дивергенції (6.2), знайдемо

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \lim_{V \to M} \left.\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\right|_{M_{cp}}.$$

Якщо область Ω стягується в точку M, то і $M_{cp} \to M$, тоді

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \left.\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\right|_{M}$$

або

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \tag{6.3}$$

Вираз (6.3) є формулою обчислення дивергенції векторного поля $\vec{a}$ в декартових координатах за умови неперервності частинних похідних $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$.

Приклад 6.1.

Знайти дивергенцію векторного поля:

1) $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$;

2) $\vec{a} = \dfrac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt[3]{(x+y+z)^2}}$;

3) $\vec{b} = e^{xy}\left(y\vec{j} - x\vec{i} + xy\vec{k}\right)$.

Пояснити одержані результати.

❍ За формулою (6.3) маємо:

1) $P(x,y,z) = x, Q(x,y,z) = y, R(x,y,z) = z$;

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 1, \frac{\partial Q}{\partial y} = 1, \frac{\partial R}{\partial z} = 1;$$

$$\operatorname{div} \vec{r} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

2) $P(x,y,z) = Q(x,y,z) = R(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+y+z)^2}}$;

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{\left(x+y+z\right)^5}};$$

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{2}{\sqrt[3]{\left(x+y+z\right)^5}}.$$

3) $P(x,y,z) = -xe^{xy}, Q(x,y,z) = ye^{xy}, R(x,y,z) = xye^{xy}$;

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -e^{xy}\left(1+xy\right), \frac{\partial Q}{\partial y} = e^{xy}\left(1+xy\right), \frac{\partial R}{\partial z} = 0;$$

$$\operatorname{div}\vec{b} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = -e^{xy}\left(1+xy\right) + e^{xy}\left(1+xy\right) + 0 = 0.$$

Одержані результати мають наступний сенс:

1) Оскільки дивергенція поля радіус-вектора $\vec{r}$ додатна і дорівнює трьом в усіх точках поля, то кожна точка поля $\vec{r}$ є джерелом сталої потужності.

2) Точка M поля вектора $\vec{a}$ в залежності від її координат може бути або джерелом, або стоком. Приміром, точка $M_1(1;0;0)$, в якій $\operatorname{div}\vec{a}(M_1) = -2$, є стоком, а точка $M_2(0;-1;0)$, в якій $\operatorname{div}\vec{a}(M_2) = 2$, є джерелом.

3) Оскільки $\operatorname{div}\vec{b} = 0$, то в полі вектора $\vec{b}$ немає ні стоків, ні джерел.●

6.1.2. Формула Остроградського — Гауса у векторній формі

Як відомо, формула Остроградського — Гауса встановлює зв'язок між поверхневим інтегралом другого роду по замкненій поверхні і потрійним інтегралом по просторовій області, обмеженій цією поверхнею. Використовуючи формулу (6.3) для дивергенції, можна записати формулу Остроградського — Гауса (2.6) у векторній формі:

$$\oiint\limits_{\Sigma} \left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\vec{a}\; dV. \tag{6.4}$$

Таким чином, потік векторного поля $\vec{a}$ через замкнену поверхню Σ в напрямку зовнішньої нормалі дорівнює потрійному інтегралу від дивергенції вектора $\vec{a}$ по області Ω, обмеженій поверхнею Σ:

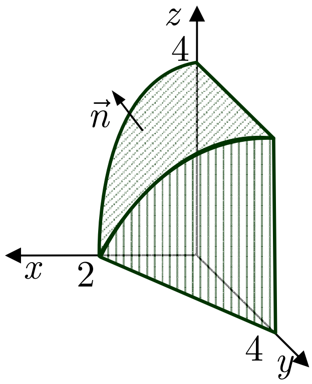
$$\Pi = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\vec{a}\; dV. \tag{6.5}$$

Зауваження 6.1. Якщо потік векторного поля $\vec{a}$ через замкнену поверхню Σ обчислюється в напрямку внутрішньої нормалі, то знак потоку зміниться на протилежний, отже:

$$\Pi = -\iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\vec{a}\; dV \tag{6.6}$$

Приклад 6.2. Обчислити потік радіуса-вектора $\vec{r}$ довільної точки через зовнішню сторону поверхні тіла, обмеженого поверхнями $z = 4 - x^2$, $2x + y = 4$ і координатними площинами.

❍Поверхня тіла обмежена параболічним циліндром $z = 4 - x^2$ і площинами $2x + y = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (рис. 6.1).



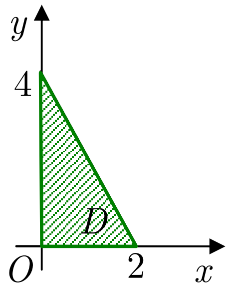


Рис. 6.1.

Застосуємо формулу Остроградського — Гауса (6.4). Оскільки

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Rightarrow \operatorname{div}\vec{r} = 1 + 1 + 1 = 3,$$

маємо

$$\Pi = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\vec{r}\, dxdydz = 3\iiint\limits_{\Omega} dxdydz =$$

$$= 3\iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{0}^{4-x^2} dz = 3\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{4-2x} dy \int\limits_{0}^{4-x^2} dz = 3\int\limits_{0}^{2} \left(4 - x^2\right) dx \int\limits_{0}^{4-2x} dy =$$

$$= 3\int\limits_{0}^{2} \left(4 - x^2\right)\left(4 - 2x\right) dx = 6\int\limits_{0}^{2} \left(x^3 - 2x^2 - 4x + 8\right) dx =$$

$$= 6\left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 8x\right)\Bigg|_0^2 = 6\left(4 - \frac{16}{3} - 8 + 16\right) = 40. \bullet$$

Приклад 6.3.

Обчислити потік векторного поля $\vec{a} = \left(z; -x; x\right)$ через внутрішню сторону частини поверхні $x^2 + y^2 = z^2$ $\left(0 \le z < R\right)$ застосувавши формулу Остроградського — Гауса.

❍Зробимо рисунок поверхні конуса $x^2 + y^2 = z^2$, обмеженого площинами $z = 0, z = R$ (рис. 6.2).

Задана поверхня не є замкненою, тому для застосування формули Остроградського — Гауса замкнемо поверхню конуса частиною площини $z = R$, що вирізається цим конусом : $\Sigma^* = \Sigma \cup \Sigma_1$. Тоді

$$\Pi = \Pi^* - \Pi_1,$$

де Π^* — потік по замкненій поверхні Σ^*, а Π_1 — потік, що обчислюється по поверхні частини площини Σ_1: $z = R$.

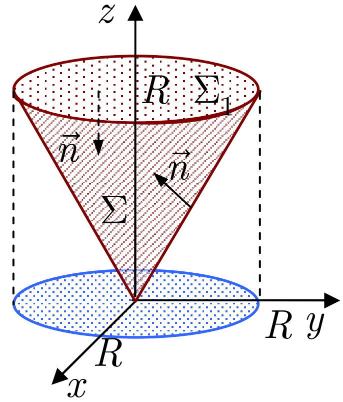


Рис. 6.2

Для обчислення інтеграла по замкненій поверхні Σ^* застосуємо формулу (6.6), враховуючи, що нормаль внутрішня:

$$\Pi^* = -\iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a}\, dxdydz = \left| \operatorname{div} \vec{a} = 0 + 0 + 0 = 0 \right| =$$

$$= -\iiint\limits_{\Omega} 0 dxdydz = 0.$$

Знайдемо потік Π_1. Частина площини $z = R$ однозначно проектується на площину Oxy в круг $D = \left\{ x^2 + y^2 \le R^2 \right\}$, $z'_x = z'_y = 0$. Отже, маємо

$$\Pi_1 = \iint\limits_{\Sigma_1} zdydz - xdxdz + xdxdy = \iint\limits_{D} \left(R \cdot 0 - x \cdot 0 + x \right) dxdy =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^2 \cos\varphi d\rho = \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi}_{=0} \int\limits_0^R \rho^2 d\rho = 0.$$

Таким чином,

$$\Pi = \Pi^* - \Pi_1 = 0. \bullet$$

6.2. Правила обчислення дивергенції

Властивість 1

(Лінійність.)
$\operatorname{div}(c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_n\vec{a}_n) = c_1 \operatorname{div} \vec{a}_1 + \ldots + c_n \operatorname{div} \vec{a}_n$,
де $c_1, \ldots, c_n$ — сталі числа.

► Нехай

$$\vec{a}_1 = P_1\vec{i} + Q_1\vec{j} + R_1\vec{k}, \ldots, \vec{a}_n = P_n\vec{i} + Q_n\vec{j} + R_n\vec{k},$$

тоді

$$\operatorname{div}(c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_n\vec{a}_n) = \operatorname{div}\left[\left(c_1P_1 + \ldots + c_nP_n \right)\vec{i} + \left(c_1Q_1 + \ldots + c_nQ_n \right)\vec{j} + \right.$$

$$+\left(c_1R_1+\ldots+c_nR_n\right)\vec{k}\,\Big] = \left(c_1\cdot\frac{\partial P_1}{\partial x}+\ldots+c_n\cdot\frac{\partial P_n}{\partial x}\right)+$$

$$+\left(c_1\cdot\frac{\partial Q_1}{\partial y}+\ldots+c_n\cdot\frac{\partial Q_n}{\partial y}\right)+\left(c_1\cdot\frac{\partial R_1}{\partial z}+\ldots+c_n\cdot\frac{\partial R_n}{\partial z}\right)=$$

$$=c_1\left(\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{\partial Q_1}{\partial y}+\frac{\partial R_1}{\partial z}\right)+\ldots+c_n\left(\frac{\partial P_n}{\partial x}+\frac{\partial Q_n}{\partial y}+\frac{\partial R_n}{\partial z}\right)=$$

$$=c_1\,\mathrm{div}\,\vec{a}_1+\ldots+c_n\,\mathrm{div}\,\vec{a}_n.◄$$

Властивість 2

Дивергенція сталого вектора $\vec{c}$ дорівнює нулю:

$$\mathrm{div}\,\vec{c}=0.$$

Доведення випливає з означення дивергенції.

Властивість 3

Дивергенція добутку скалярної функції $u(M)$ на вектор $\vec{a}(M)$ обчислюється за формулою

$$\mathrm{div}(u\vec{a})=u\,\mathrm{div}\,\vec{a}+(\mathrm{grad}\,u,\vec{a}). \tag{6.7}$$

$$► \mathrm{div}(u\vec{a})=\mathrm{div}\left[uP\vec{i}+uQ\vec{j}+uR\vec{k}\right]=\frac{\partial(uP)}{\partial x}+\frac{\partial(uQ)}{\partial y}+\frac{\partial(uR)}{\partial z}=$$

$$=u\frac{\partial P}{\partial x}+u\frac{\partial Q}{\partial y}+u\frac{\partial R}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial x}P+\frac{\partial u}{\partial y}Q+\frac{\partial u}{\partial z}R=u\,\mathrm{div}\,\vec{a}+(\mathrm{grad}\,u,\vec{a}).◄$$

Властивість 4

$\mathrm{div}(u\vec{c})=(\mathrm{grad}\,u,\vec{c}),\qquad \vec{c}$ — сталий вектор.

Доведення випливає з властивостей 2 і 3.

Приклад 6.4.

Обчислити дивергенцію напруженості поля точкового заряду q, тобто вектора $\vec{E}=\dfrac{q}{r^2}\vec{r}^{\,0}$.

❍ Маємо

$$\mathrm{div}\,\vec{E}=\mathrm{div}\,\frac{q}{r^2}\vec{r}^{\,0}=\mathrm{div}\,\frac{q}{r^3}\vec{r},$$

де

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k},\; r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

За властивістю 3 дивергенції векторного поля (6.7) одержимо

$$\mathrm{div}\,\frac{q}{r^3}\vec{r}=\frac{q}{r^3}\mathrm{div}\,\vec{r}+\left(\mathrm{grad}\,\frac{q}{r^3},\vec{r}\right)=\frac{3q}{r^3}+\left(-\frac{3q}{r^4}\vec{r}^{\,0},r\vec{r}^{\,0}\right)=\frac{3q}{r^3}-\frac{3q}{r^3}=0, r\neq 0.$$

Отже, у будь-якій точці поля, де визначений вектор $\vec{E}$, немає ні джерел, ані стоків: $\mathrm{div}\,\vec{E}=0$. У точці, в якій вміщений заряд, це несправедливо, бо там $\vec{r}=0$ і $\vec{E}$ невизначена.●