1. Розв'язання навчальних задач

Навчальна задача 5.1. Знайти дивергенцію векторного поля $\operatorname{grad} u$, де $u = x^2 + y^2 + z^2$.

❍ Маємо:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k};$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(2y) + \frac{\partial}{\partial z}(2z) = 2 + 2 + 2 = 6.$$

Отже, в кожній точці поля $\operatorname{grad} u$ міститься джерело. ●

Навчальна задача 5.2. Обчислити $\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$, де $\vec{r}$ — радіус-вектор точки поля, а $r = |\vec{r}|$.

❍ Дивергенцію знайдемо за формулою (43.7):

$$\operatorname{div}(u\vec{a}) = u \operatorname{div} \vec{a} + (\operatorname{grad} u, \vec{a}),$$

де $\vec{a} = \vec{r}$, $u = \frac{1}{r}$.

Маємо

$$\operatorname{div} \vec{r} = \operatorname{div}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = 1 + 1 + 1 = 3,$$

$$\operatorname{grad}\frac{1}{r} = \operatorname{grad}\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}},$$

$$\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}, \vec{r}\right) = -\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{1}{r}.$$

Отже,

$$\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r}. \bullet$$

Навчальна задача 5.3. Знайти потік вектора

$\vec{a} = (x - 2z)\vec{i} + (3z - 4x)\vec{j} + (5x + y)\vec{k}$

через зовнішню сторону поверхні тетраедра, утвореного площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

❍ Поверхня тетраедра замкнена (рис. 5.1), тому для обчислення потоку скористаємось формулою Остроградського — Гаусса.

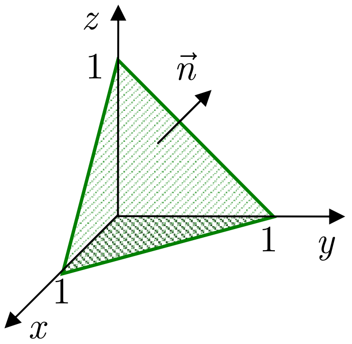

Рис. 5.1

Маємо

$$\text{Ї} = \oiint\limits_{\sigma} (\vec a, \vec n^0)\, d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div} \vec a \; dV =$$

$$= \left| \operatorname{div} a = \frac{\partial}{\partial x}(x - 2z) + \frac{\partial}{\partial y}(3z - 4x) + \frac{\partial}{\partial z}(5x + y) = 1 + 0 + 0 = 1 \right| =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} dxdydz = V = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6},$$

де V — об'єм тетраедра, S — площа його основи, а h — висота.●

Навчальна задача 5.4. Знайти потік радіус-вектора точки через зовнішню сторону частини поверхні $x^2 + y^2 = 1$, що відтинається площинами $z = 0$ і $z = 2$.

❍ Обчислимо потік радіус-вектора $\vec r = x\vec i + y\vec j + z\vec k$ через частину поверхні циліндра (рис. 5.2), застосувавши метод впровадження криволінійних координат на поверхні.

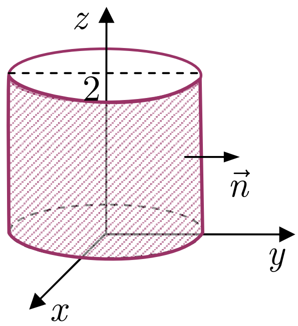

Рис. 5.2

Параметричні рівняння циліндра $x^2 + y^2 = 1$ мають вигляд:

$$\begin{cases} x = \cos\varphi, \\ y = \sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Тому

$$d\sigma = 1 \cdot d\varphi dz,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le z \le 2,\ \vec n^0 = \frac{x\vec i + y\vec j}{\sqrt{x^2 + y^2}} = x\vec i + y\vec j,$$

$$(\vec r, \vec n^0) = x^2 + y^2 = 1.$$

Отже, за формулою потоку маємо

$$\Pi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(\vec{r}, \vec{n}^0\right) dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dz = 4\pi. \bullet$$

2. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 5.1. Знайти дивергенцію векторного поля:

1) $\vec{a}_1 = \dfrac{x}{y^2}\vec{i} + \left(2x^3 - 5y\right)\vec{j}$;

2) $\vec{a}_2 = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\vec{j} - \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right)\vec{i} + \left(5z + xy^2\right)\vec{k}$;

3) $\vec{a}_3 = (2y - \ln z)\vec{i} + \left(y^2 + 3xz - 5\right)\vec{j} + (x - 2yz)\vec{k}$.

Пояснити одержані результати.

❍ 1) $\dfrac{1}{y^2} - 5$; 2) 5; 3) 0. ●

Задача 5.2. Показати, що

$\operatorname{div} f(r)\vec{r} = 3f(r) + rf'(r)$,

де $\vec{r}$ — радіус-вектор точки поля, а r — його модуль.

Задача 5.3. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} - \vec{j} + z^2\vec{k}$ через циліндричну поверхню $x^2 + y^2 = 1$, обмежену поверхнями $z = 0$, $x + y + z = 4$, в напрямі зовнішньої нормалі.

❍ 80π. ●

Задача 5.4. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (z - y)\vec{k}$ через зовнішню сторону частини поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, розташовану в першому октанті.

❍ $\dfrac{27}{2}\pi$. ●

Задача 5.5. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = 2x^2\vec{i} + 3y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ через зовнішню сторону поверхні тіла $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le \sqrt{2R^2 - x^2 - y^2}$.

❍ πR^4. ●

Задача 5.6. Доведіть, що потік радіуса-вектора точки поля через довільну замкнену поверхню дорівнює потроєному об'єму тіла, обмеженого цією поверхнею.

Задача 5.7. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + \sin^2 z\vec{k}$ через зовнішню сторону частини циліндричної поверхні

$x^2 + y^2 = 4$ між площинами $z = 1$ і $z = 3$. Застосувати метод введення криволінійних координат на поверхні.

❍ 16π. ●

Задача 5.8. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = \left(x + xy^2z\right)\vec{i} + \left(y - x^2yz\right)\vec{j} + z\vec{k}$ через зовнішню сторону частини поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, що відтинається площиною $z = 0$ $\left(z > 0\right)$.

❍ 54π. ●