

Лекція 5. Потік векторного поля

Короткий зміст

Розділ 5.1. *Поняття потоку векторного поля через поверхню*

Розділ 5.2. *Обчислення потоку векторного поля методом впровадження криволінійних координат на поверхні*

Короткий зміст

У цій лекції:

- означено поняття потоку векторного поля;
- розглянуто метод впровадження криволінійних координат на поверхні для обчислення потоку векторного поля.

5.1. Поняття потоку векторного поля через поверхню

Розглянемо випадок поля швидкостей \vec{v} течії рідини. Нехай Σ — деяка поверхня. *Потоком рідини* через поверхню Σ називається кількість рідини, що протікає через поверхню Σ за одиницю часу. Якщо швидкість течії стала — $\vec{v} = \text{const}$, а поверхня Σ плоска, то потік Π рідини дорівнює об'єму циліндричного тіла з паралельними основами і твірними довжини $|\vec{v}|$ (рис. 5.1).

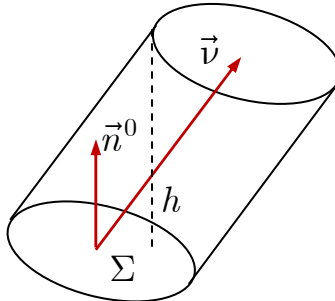


Рис. 5.1

Отже,

$$\Pi = V = Sh,$$

де S — площа основи, $h = n p_{\vec{n}} \vec{v} = (\vec{v}, \vec{n}^0)$ — висота циліндра, \vec{n}^0 — орт вектора нормалі основи циліндра.

Таким чином, при сталій швидкості \vec{v} потік рідини через плоску поверхню Σ дорівнює

$$\Pi = (\vec{v}, \vec{n}^0) \cdot S.$$

Нехай тепер швидкість \vec{v} змінюється неперервно, а поверхня Σ — гладка. Розіб'ємо поверхню Σ на часткові поверхні Σ_i , $i = \overline{1, n}$, кожен з яких будемо вважати плоскою, а вектор \vec{v} на ній сталим. Оскільки потік рідини через поверхню Σ дорівнює сумі потоків через всі її частини Σ_i , то для обчислення потоку одержуємо наближену формулу

$$\Pi \simeq \sum_{i=1}^n (\vec{v}, \vec{n}^0) \Big|_{M_i} \cdot \Delta\sigma_i, \quad (5.1)$$

де M_i — довільна точка на поверхні Σ_i , $\Delta\sigma_i$ — площа поверхні Σ_i (рис. 5.2).

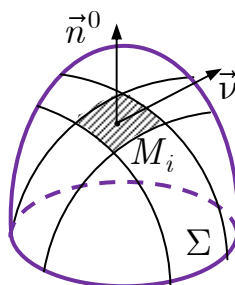


Рис. 5.2

Таким чином, потік рідини через поверхню Σ дорівнює границі суми (5.1) при $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(\Sigma_i) \rightarrow 0$, тобто поверхневному інтегралу другого роду:

$$\Pi = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\vec{v}, \vec{n}^0) \Big|_{M_i} \cdot \Delta\sigma_i = \iint_{\Sigma} (\vec{v}, \vec{n}^0) d\sigma.$$

Нехай задано довільне векторне поле

$$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

де функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ неперервні. Наведемо означення потоку векторного поля \vec{a} через гладку поверхню, незалежно від фізичного змісту вектора \vec{a} .

Означення 5.1.

Потоком вектора (векторного поля)

$$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

через поверхню Σ називають інтеграл по поверхні Σ від проекції вектора \vec{a} на нормаль до поверхні

$$\Pi = \iint_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{n}^0) d\sigma. \quad (5.2)$$

Таким чином,

$$\Pi = \iint_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{n}^0) d\sigma = \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdx dy.$$

Зазначимо, що потік вектора — величина скалярна. Якщо $(\vec{a}, \vec{n}^0) < \frac{\pi}{2}$, то $\Pi > 0$. В цьому випадку потік вектора \vec{a} йде з внутрішнього на зовнішній бік поверхні Σ (рис. 5.3, а). Якщо ж $(\vec{a}, \vec{n}^0) > \frac{\pi}{2}$, то $\Pi < 0$, і потік йде з зовнішнього на внутрішній бік поверхні (рис. 5.3, б).

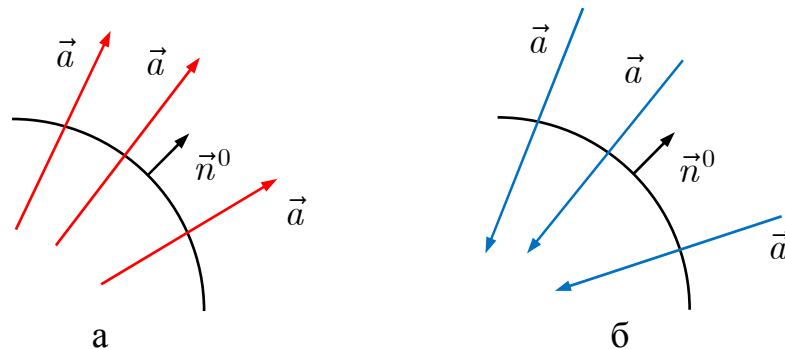


Рис. 5.3

Якщо змінити орієнтацію поверхні, то знак потоку зміниться на протилежний внаслідок властивості \mathcal{Z}° поверхневих інтегралів. Оскільки потік векторного поля задається поверхневим інтегралом другого роду, то методи обчислення потоків співпадають з методами знаходження поверхневих інтегралів другого роду.

Приклад 5.1.

Поле утворюється точковим зарядом (електричне поле) або точковою масою (поле тяжіння), що розміщені у початку координат. Тоді вектор напруженості поля в будь-якій точці P буде дорівнювати $\vec{E} = \frac{q}{r^2} \vec{r}^0$, де q — величина заряду (маси), $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ — радіус-вектор

точки P . Знайти потік вектора напруженості \vec{E} через S_R — сферу радіусом R з центром у початку координат.

○ Напрямок нормалі до сфери співпадає з напрямком радіус-вектора точки P , то $\vec{n}^0 = \vec{r}^0$ і тому

$$(\vec{E}, \vec{n}^0) = (\vec{E}, \vec{r}^0) = \frac{q}{r^2}.$$

На сфері радіуса R маємо $r = R$, тому $(\vec{E}, \vec{n}^0) = \frac{q}{R^2} = \text{const}$. Тому потік векторного поля через сферу S_R дорівнює

$$\Pi = \iint_{S_R} (\vec{E}, \vec{n}^0) d\sigma = \frac{q}{R^2} \iint_{S_R} d\sigma = \frac{q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi q. \bullet$$

Приклад 5.2.

Знайти потік вектора $\vec{a} = x^2\vec{i} + x\vec{j} + xz\vec{k}$ через зовнішню сторону поверхні $y = x^2 + z^2$, яка міститься в першому октанті та обмежена площиною $y = 1$.

○ Зробимо рисунок частини поверхні параболоїда, що знаходиться в першому октанті і відтинається площиною $y = 1$ (рис. 5.4). Поверхня параболоїда незамкнена, потік знайдемо методом проєкції на одну координатну площину. На площину Oxz дана поверхня проєктується в чверть круга $x^2 + z^2 \leq 1, (x \geq 0, z \geq 0)$. Тоді

$$\Pi = \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdx dy = \pm \iint_{D_{xz}} [P(-y'_x) + Q + R(-y'_z)] dx dz.$$

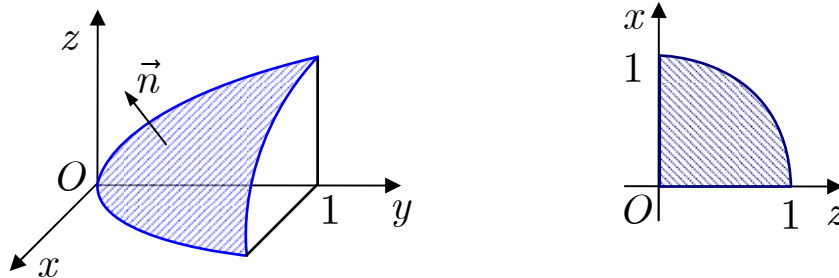


Рис. 5.4

Маємо

$$P(x, y, z) = x^2, Q(x, y, z) = x, R(x, y, z) = xz;$$

$$y = x^2 + z^2, y'_x = 2x, y'_z = 2z.$$

Оскільки зовнішня нормаль утворює тупий кут з віссю Oy , то перед подвійним інтегралом слід вибрати знак « \leftarrow ». Таким чином,

$$\Pi = \iint_{\Sigma} x^2 dy dz + x dx dz + xz dx dy = - \iint_{D_{xz}} [x^2(-2x) + x + xz(-2z)] dx dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{matrix} z = \rho \cos \varphi \\ x = \rho \sin \varphi \end{matrix} \right| = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \left(-2\rho^3 \sin^3 \varphi + \rho \sin \varphi - 2\rho^3 \sin \varphi \cos^2 \varphi \right) \rho d\rho = \\
&= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \left(-2\rho^4 \sin \varphi + \rho^2 \sin \varphi \right) d\rho = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \left(\frac{\rho^3}{3} - \frac{2\rho^5}{5} \right) \Big|_0^1 d\varphi = \frac{1}{15}. \bullet
\end{aligned}$$

5.2. Обчислення потоку векторного поля методом впровадження криволінійних координат на поверхні

Якщо поверхня Σ є частиною кругового циліндра або сфери, при обчисленні потоку зручно, не застосовуючи метод проектування на координатні площини, ввести на поверхні криволінійні координати.

1) Нехай поверхня Σ є частиною кругового циліндра

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

обмеженою поверхнями $z = f_1(x, y)$ і $z = f_2(x, y)$, причому $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$ (рис. 5.5).

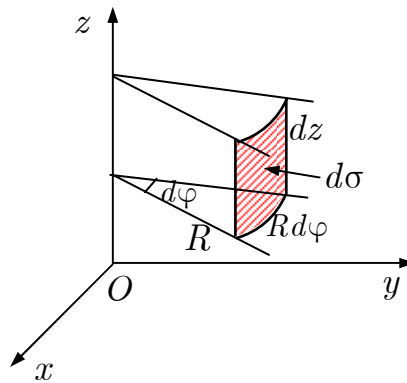


Рис. 5.5

Покладемо

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi, \\ y = R \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Тоді $f_1(R \cos \varphi, R \sin \varphi) \leq z \leq f_2(R \cos \varphi, R \sin \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Тому елемент площі

$$d\sigma = R d\varphi dz,$$

а потік векторного поля \vec{a} через зовнішню частину поверхні Σ обчислюється за формулою

$$\Pi = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{f_1(R \cos \varphi, R \sin \varphi)}^{f_2(R \cos \varphi, R \sin \varphi)} (\vec{a}, \vec{n}^0) dz, \quad (5.3)$$

де

$$\vec{n}^0 = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{R}.$$

Приклад 5.3.

Знайти потік радіус-вектора точки через зовнішню сторону частини поверхні $x^2 + y^2 = 1$, що відтинається площинами $z = 0$ і $z = 2$.

○ Обчислимо потік радіус-вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через частину поверхні циліндра (рис. 5.6), застосувавши метод впровадження криволінійних координат на поверхні.

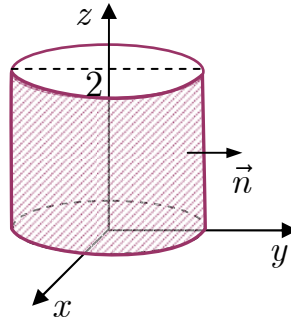


Рис. 5.6

Параметричні рівняння циліндра $x^2 + y^2 = 1$ мають вигляд:

$$\begin{cases} x = \cos \varphi, \\ y = \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Тому

$$d\sigma = 1 \cdot d\varphi dz, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 2, \quad \vec{n}^0 = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = x\vec{i} + y\vec{j},$$

$$(\vec{r}, \vec{n}^0) = x^2 + y^2 = 1.$$

Отже, за формулою (5.3) маємо

$$\Pi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (\vec{r}, \vec{n}^0) dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dz = 4\pi. \bullet$$

2) Нехай поверхня Σ є частиною сфери

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

обмеженої кінчними поверхнями, рівняння яких в сферичних координатах мають вигляд $\theta = \theta_1(\varphi)$, $\theta = \theta_2(\varphi)$, і півплощинами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ (рис. 5.7).

Параметричні рівняння сфери мають вигляд

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \sin \theta, \\ y = R \sin \varphi \sin \theta, \\ z = R \cos \theta, \end{cases}$$

де $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. Тому для елемента площі маємо рівність

$$d\sigma = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

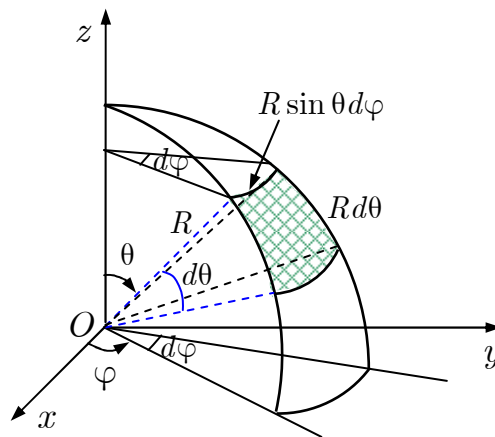


Рис. 5.7

В цьому випадку потік векторного поля \vec{a} через зовнішню частину поверхні Σ знаходять за формулою

$$\Pi = R^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} (\vec{a}, \vec{n}^0) \sin \theta d\theta, \quad (5.4)$$

де

$$\vec{n}^0 = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{R}.$$

Приклад 5.4.

Знайти потік векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (z - y)\vec{k}$ через зовнішню сторону частини поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, що відтинається площиною $z = 0$ ($z > 0$).

○Знайдемо потік векторного поля \vec{a} через частину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ (рис. 5.8), застосувавши метод введення криволінійних координат на сфері.

Параметричні рівняння сфери мають вигляд

$$\begin{cases} x = 3 \cos \varphi \sin \theta, \\ y = 3 \sin \varphi \sin \theta, \\ z = 3 \cos \theta. \end{cases}$$

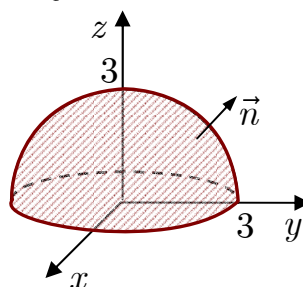


Рис. 5.8

Тому для елемента площі поверхні маємо

$$d\sigma = 9 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Зовнішня нормаль до сфери має напрям радіус-вектора точки:

$$\vec{n}^0 = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{a}, \vec{n}^0) = \frac{x^2 + y(y+z) + z(z-y)}{3} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} = 3.$$

Отже, за формулою (5.4) маємо

$$\Pi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9 \cdot 3 \sin \theta d\theta = 54\pi. \bullet$$