

Лекція 4. Градієнт скалярного поля

Короткий зміст

Розділ 4.1. *Поняття градієнта скалярного поля*

4.1.1. *Означення градієнта скалярного поля*

4.1.2. *Властивості градієнта скалярного поля*

4.1.3. *Інваріантне означення градієнта*

4.1.4. *Правила обчислення градієнта*

Розділ 4.2. *Векторні лінії векторного поля*

4.2.1. *Означення векторної лінії*

4.2.2. *Поле градієнта і його лінії*

Короткий зміст

У цій лекції:

- наведено означення, властивості та правила обчислення градієнта скалярного поля;
- розглянуто диференціальні рівняння для знаходження векторних ліній векторного поля.

4.1. Поняття градієнта скалярного поля

4.1.1. Означення градієнта скалярного поля

Нехай скалярне поле визначають диференційовною функцією $u = u(x, y, z)$.

Означення 4.1.

Градієнтом скалярного поля u в даній точці M називають вектор, що позначають символом $\text{grad } u$ і визначають рівністю

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}. \quad (4.1)$$

Вектор $\text{grad } u$ залежить як від самої функції u так і від точки M , в якій обчислюються частинні похідні.

Нехай \vec{l}^0 — орт вектора \vec{l} , тобто

$$\vec{l}^0 = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \cos \beta \cdot \vec{j} + \cos \gamma \cdot \vec{k}, \quad (4.2)$$

де $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — напрямні косинуси вектора \vec{l} . Тоді формулу (3.4) для похідної за напрямом можна записати наступним чином:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\text{grad } u, \vec{l}^0). \quad (4.3)$$

Отже, похідна за напрямом від функції u за напрямом \vec{l} дорівнює скалярному добутку градієнта функції $u(M)$ на орт \vec{l}^0 напрямку \vec{l} .

Приклад 4.1.

Знайти градієнт потенціалу електростатичного поля, утвореного точковим зарядом

$$u = \frac{q}{r} = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

○ Знайдемо проєкції градієнта на осі координат:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{q}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{q}{r^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{qx}{r^3}.$$

Аналогічно,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{qy}{r^3}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{qz}{r^3}.$$

Таким чином,

$$\text{grad } u = -\frac{qx}{r^3} \vec{i} - \frac{qy}{r^3} \vec{j} - \frac{qz}{r^3} \vec{k} = -\frac{q}{r^3} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = -\frac{q}{r^3} \vec{r} = -\frac{q}{r^2} \vec{r}^0,$$

де \vec{r}^0 — орт вектора \vec{r} .

Вектор $\vec{E} = -\text{grad } \frac{q}{r}$ називається напруженістю електростатичного поля:

$$\vec{E} = \frac{q}{r^3} \vec{r}. \bullet$$

4.1.2. Властивості градієнта скалярного поля

Теорема 4.1.

Градієнт скалярного поля напрямлений вздовж нормалі до поверхні рівня (або лінії рівня, якщо $u = u(x, y)$).

► Проведемо через довільну точку M поверхню рівня $u = \text{const}$ і виберемо на цій поверхні гладку криву L , що проходить через точку M (рис. 4.1).

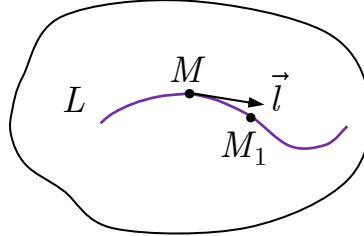


Рис. 4.1

Нехай \vec{l} — вектор, дотичний до кривої L в точці M . Оскільки на поверхні рівня $u(M) = u(M_1)$ для довільної точки $M_1 \in L$, то похідна за напрямом в точці M дорівнює нулю:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\substack{\Delta l \rightarrow 0 \\ (M_1 \rightarrow M)}} \frac{u(M_1) - u(M)}{\Delta l} = 0.$$

За формулою (4.3): $\frac{\partial u}{\partial l} = (\text{grad } u, \vec{l}^0)$. Тому $(\text{grad } u, \vec{l}^0) = 0$, звідки $\text{grad } u \perp \vec{l}^0$. Таким чином, $\text{grad } u$ перпендикулярний до будь-якої дотичної до поверхні рівня в точці M , отже, він напрямлений вздовж нормалі до поверхні рівня в точці M . ◀

Теорема 4.2.

Градієнт скалярного поля напрямлений в бік зростання функції поля.

► В теоремі 4.1 ми довели, що градієнт напрямлений вздовж нормалі до поверхні (лінії) рівня. Оскільки поверхні, що розглядаються двосторонні, то нормаль може бути орієнтована або в бік зростання функції $u(M)$, або в бік її спадання.

Позначимо через \vec{n} нормаль до поверхні рівня, що напрямлена в бік зростання функції $u(M)$ та знайдемо похідну функції u в напрямі цієї нормалі:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \lim_{(M_1 \rightarrow M)} \frac{u(M_1) - u(M)}{\Delta l}.$$

Оскільки $u(M_1) > u(M)$, то $u(M_1) - u(M) > 0$, тому

$$\frac{\partial u}{\partial n} = (\text{grad } u, \vec{n}^0) \geq 0, \text{ отже, } \text{grad } u \uparrow \vec{n}. \text{ Це і означає, що } \text{grad } u \text{ напрямлений в бік зростання функції поля } u(M). \blacktriangleleft$$

Теорема 4.3.

Модуль градієнта скалярного поля дорівнює найбільшій похідній за напрямом в даній точці поля:

$$\max \frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}. \quad (4.4)$$

► Нехай \vec{l} — довільний напрям в точці M . Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\text{grad } u, \vec{l}^0) = |\text{grad } u| \cdot 1 \cdot \cos \varphi,$$

де φ — кут між векторами \vec{l} та $\text{grad } u$. Оскільки $|\cos \varphi| \leq 1$, то $\max_{\varphi} \cos \varphi = 1$ і найбільшим значенням похідної $\frac{\partial u}{\partial l}$ є $|\text{grad } u|$:

$$\max \frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad } u|. \blacktriangleleft$$

Приклад 4.2.

Знайти величину і напрям найбільшого зростання функції $u(M) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в точці $M_0(1; 2; 1)$.

○ Найбільше зростання функції відбувається у напрямі градієнта цієї функції в даній точці.

$$u'_x(M_0) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Big|_{M_0} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad u'_y(M_0) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Big|_{M_0} = \frac{2}{\sqrt{6}},$$

$$u'_z(M_0) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Big|_{M_0} = \frac{1}{\sqrt{6}};$$

$$\text{grad } u(M_0) = \frac{1}{\sqrt{6}} \vec{i} + \frac{2}{\sqrt{6}} \vec{j} + \frac{1}{\sqrt{6}} \vec{k}.$$

Тоді

$$|\text{grad } u(M_0)| = \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6}} = 1,$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{6}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Отже,

$$\max \frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{M_0} = |\text{grad } u(M_0)| = 1, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{6}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}. \bullet$$

4.1.3. Інваріантне означення градієнта

Як відомо, *інваріантами* об'єкта називаються величини, що характеризують властивості об'єкта і не залежать від вибору системи координат. Враховуючи розглянуті властивості градієнта, можна сформулювати інваріантне означення градієнта.

Означення 4.2.

Градієнт скалярного поля — це вектор, напрямлений вздовж нормалі до поверхні (лінії) рівня в бік зростання функції поля і довжина якого дорівнює найбільшій похідній за напрямом в даній точці.

Якщо \vec{n}^0 — орт нормалі, напрямлений в бік зростання функції поля, то

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \vec{n}^0. \quad (4.5)$$

Приклад 4.3.

Знайти градієнт відстані

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$
 між точками $M_0(x_0; y_0; z_0)$ та $M(x; y; z)$, де $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — фіксована точка, а $M(x; y; z)$ — довільна точка в \mathbb{R}^3 .

○ Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial r}{\partial z}$:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}},$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y - y_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}},$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z - z_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}.$$

Тоді

$$\text{grad } r = \frac{\partial r}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial r}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial r}{\partial z} \vec{k} = \frac{(x - x_0) \vec{i} + (y - y_0) \vec{j} + (z - z_0) \vec{k}}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} = \vec{r}^0,$$

де \vec{r}^0 — орт напрямку $\overrightarrow{M_0M}$. Таким чином,

$$\text{grad } r = \vec{r}^0. \bullet$$

4.1.4. Правила обчислення градієнта**Властивість 1**

$$\text{grad } cu(M) = c \text{ grad } u(M), \text{ де } c = \text{const}.$$
Властивість 2

$$\text{grad}(u + v) = \text{grad } u + \text{grad } v.$$

Доведення властивостей 1 і 2 випливають з означення градієнта та властивостей похідних.

Властивість 3

$$\text{grad}(u \cdot v) = v \text{ grad } u + u \text{ grad } v.$$

► Застосуємо правило диференціювання добутку

$$\begin{aligned} \text{grad}(u \cdot v) &= \frac{\partial(uv)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial(uv)}{\partial z} \vec{k} = \\ &= \left(v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \vec{i} + \left(v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y} \right) \vec{j} + \left(v \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{k} = \\ &= v \left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \right) + u \left(\frac{\partial v}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial v}{\partial z} \vec{k} \right) = \\ &= v \text{ grad } u + u \text{ grad } v. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Властивість 4

$$\text{grad} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \text{ grad } u - u \text{ grad } v}{v^2}, v \neq 0.$$

Доводиться аналогічно властивості 3.

Властивість 5

Нехай $F(u)$ — диференційовна скалярна функція. Тоді

$$\text{grad } F(u) = F'(u) \text{ grad } u.$$

► За означенням градієнта можна записати

$$\operatorname{grad} F(u) = \frac{\partial F(u)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F(u)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F(u)}{\partial z} \vec{k}.$$

Застосуємо правило диференціювання складеної функції для всіх доданків в правій частині рівності:

$$\operatorname{grad} F(u) = F'(u) \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + F'(u) \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + F'(u) \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = F'(u) \operatorname{grad} u. \blacktriangleleft$$

Наслідок.

Якщо r — відстань між двома точками M_0 та M , то $\operatorname{grad} F(r) = F'(r) \cdot \vec{r}^0$, де \vec{r}^0 — орт напрямку $\overrightarrow{M_0M}$.

Доведення випливає з властивості 5 та прикладу 4.2.

4.2. Векторні лінії векторного поля

4.2.1. Означення векторної лінії

Нехай задано векторне поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$. Задання векторного поля рівносильно заданню трьох скалярних функцій від трьох змінних $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$:

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}.$$

Для геометричної характеристики векторного поля розглядають векторні лінії. **Векторною (силовою) лінією векторного поля** \vec{a} називають криву, дотична до якої в довільній точці M має напрям вектора \vec{a} в цій точці (рис.4.2).

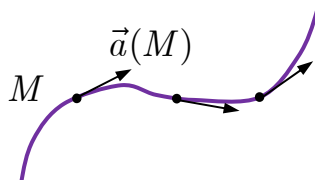


Рис. 4.2

Приміром, напруженість електростатичного поля визначається вектором $\vec{E} = \frac{q}{r^3} \vec{r}$. Тому, для позитивного заряду векторними лініями будуть промені, що виходять з заряду. Для магнітного поля векторними лініями будуть лінії, що виходять з північного полюса і закінчуються в південному. Якщо розглянути потік нестисливої рідини, в кожній точці якої рідина рухається зі швидкістю, яка залежить виключно від положення точки в просторі і не залежить від часу, векторними лініями будуть лінії току рідини.

Нехай векторне поле визначається векторною функцією

$$\vec{a} = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k},$$

де функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ неперервні і мають обмежені частинні похідні першого порядку.

Нехай $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ — радіус-вектор довільної точки векторної лінії векторного поля \vec{a} . Тоді вектор $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$ напрямлений вздовж дотичної до цієї кривої. З означення векторної лінії випливає, що вектори $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ і $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$ колінеарні, а отже, координати цих векторів пропорційні:

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}. \quad (4.6)$$

Таким чином, ми одержали систему диференціальних рівнянь для векторних ліній векторного поля.

Просторові області, цілком складені з векторних ліній, називають **векторними трубками**. В кожній точці M поверхні векторної трубки вектор $\vec{a}(M)$ лежить на дотичній площині до поверхні.

Приклад 4.4.

Знайти векторні лінії магнітного поля, утвореного сталим електричним током з силою I , що тече по нескінченно довгому прямолінійному дроту.

○ Нехай дріт співпадає з віссю Oz , тоді вектор \vec{H} напруженості магнітного поля:

$$\vec{H} = \frac{2I}{\rho^2}(-y\vec{i} + x\vec{j}).$$

В даному випадку

$$P(x, y, z) = -\frac{2I}{\rho^2}y, \quad Q(x, y, z) = \frac{2I}{\rho^2}x, \quad R(x, y, z) = 0.$$

Система рівнянь (4.6) матиме вигляд

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}.$$

Система рівносильна двом рівнянням: $dz = 0 \Rightarrow z = C_1 = \text{const}$ і

$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}$. Останнє рівняння з відокремленими змінними $x dx = -y dy$, звідки

знаходимо $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2C_2$.

Отже, векторні лінії напруженості магнітного поля визначаються рівняннями

$$z = C_1, \quad x^2 + y^2 = 2C_2.$$

Ці лінії є колами з центром на осі Oz , що лежать в площині, перпендикулярній до цієї осі. ●

4.2.2. Поле градієнта і його лінії

Якщо $u = u(x, y, z)$ — скалярне поле, то $\vec{a} = \text{grad } u$ називають *полем градієнта* скалярного поля u . *Векторною лінією поля градієнта* або *лінією градієнта* називають криву, дотична до якої в кожній точці співпадає з напрямом $\text{grad } u$. З властивостей градієнта поля u випливає, що лінія градієнта — це крива, вздовж якої функція $u(x, y, z)$ максимально зростає (або максимально спадає). Крім того, лінії градієнта завжди перпендикулярні до поверхні рівня поля u . Оскільки $\text{grad } u = (u'_x; u'_y; u'_z)$, то за формулою (4.6) маємо наступну систему диференціальних рівнянь для ліній градієнта:

$$\frac{dx}{u'_x} = \frac{dy}{u'_y} = \frac{dz}{u'_z}. \quad (4.7)$$