1. Розв'язання навчальних задач

Навчальна задача 3.1.

Знайти похідну скалярного поля $u = \dfrac{\sqrt{x}}{y} + \dfrac{8y}{2+\sqrt{z}}$ в точці $M_0(4;1;4)$ за напрямом вектора $\overrightarrow{M_0N}$, де $N(7;-3;4)$.

❍ Знайдемо частинні похідні функції $u(x,y,z)$ в точці M_0:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}y}\right|_{M_0} = \frac{1}{4}, \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.\left(-\frac{\sqrt{x}}{y^2} + \frac{8}{2+\sqrt{z}}\right)\right|_{M_0} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = -\left.\frac{4y}{\sqrt{z}\left(2+\sqrt{z}\right)^2}\right|_{M_0} = -\frac{1}{8}.$$

Знайдемо напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_0N}$:

$$\overrightarrow{M_0N} = (3;-4;0), \left|\overrightarrow{M_0N}\right| = \sqrt{9+16+0} = 5,$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{5}, \cos\beta = -\frac{4}{5}, \cos\gamma = 0.$$

Тоді похідна скалярного поля $u(x,y,z)$ за напрямом вектора $\overrightarrow{M_0N}$ дорівнює:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5} + 0\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{1}{8}\right)\cdot 0 = \frac{3}{20}. \bullet$$

Навчальна задача 3.2.

Знайти похідну скалярного поля $z = \arccos\dfrac{x}{y}$ в точці $M_0(0;1)$ за напрямом дотичної до кривої $x = 3\cos t, y = 4\sin t$ при $t = 0$ в бік спадання ординати.

❍ Знайдемо кутовий коефіцієнт дотичної до еліпса $x = 3\cos t, y = 4\sin t$ (рис. 3.1):

$$\left.y'\right|_{t=0} = \operatorname{tg}\alpha = \left.\frac{y'_t}{x'_t}\right|_{t=0} = -\left.\frac{4\cos t}{3\sin t}\right|_{t=0} = -\infty \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{2}.$$

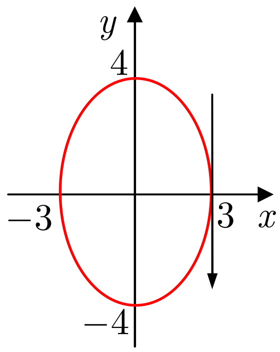

Рис. 3.1

Похідну за напрямом знайдемо за формулою:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} \sin\alpha\,,$$

де

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{y\sqrt{1-\dfrac{x^2}{y^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\,,\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y^2\sqrt{1-\dfrac{x^2}{y^2}}} = \frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}\,,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = -1,\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = 0;\ \cos\alpha = 0, \sin\alpha = -1.$$

Таким чином,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0} = 0. \bullet$$

Навчальна задача 3.3. Знайти величину і напрям градієнта поля $u = \dfrac{x}{y} + z^3$ в точці $M_0\,(2;1;0\,)$.

❍ За означенням градієнта скалярного поля

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\,.$$

Отже, маємо

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\frac{1}{y}\right|_{M_0} = 1,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = -\left.\frac{x}{y^2}\right|_{M_0} = -2,\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = \left.3z^2\right|_{M_0} = 0;$$

$$\operatorname{grad} u\,(\,M_0\,) = (\,1;-2;0\,)\,.$$

Тоді

$$|\operatorname{grad} u\,(\,M_0\,)| = \sqrt{1+4+0} = \sqrt{5},$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}\,,\ \cos\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}\,,\ \cos\gamma = 0.\bullet$$

Навчальна задача 3.4. Знайти похідну скалярного поля $u = xyz$ в точці $M_0\left(1;1;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ за напрямом внутрішньої нормалі до поверхні $\sigma : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1\,.$

❍ Як відомо, вектор нормалі до поверхні σ, заданої неявно, знаходиться за формулою:

$$\vec{n} = \left(\,F'_x; F'_y; F'_z\,\right).$$

За умовою $F\,(\,x,y,z\,) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} + z^2 - 1$, тому

$$F'_x=\frac{x}{2},\ F'_y=\frac{y}{2},F'_z=2z;\ F'_x(M_0)=\frac{1}{2},F'_y(M_0)=\frac{1}{2},F'_z(M_0)=\sqrt{2};$$

$$\vec{n}=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\sqrt{2}\right),|\vec{n}|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+2}=\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Таким чином, орт внутрішньої нормалі:

$$\vec{n}^0=-\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{10}};-\frac{1}{\sqrt{10}};-\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Знайдемо градієнт функції $u=xyz$ в точці M_0:

$$u'_x=yz,\ u'_y=xz,\ u'_z=xy,\ \operatorname{grad}u=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};1\right).$$

Отже, маємо

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{M_0}=\left(\operatorname{grad}u(M_0),\vec{n}^0\right)=-\frac{1}{2\sqrt{5}}-\frac{1}{2\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{3\sqrt{5}}{5}.●$$

Навчальна задача 3.5. Знайти кут між градієнтами скалярних полів $z=\sqrt{x^2+y^2}$ і $u=x-3y+\sqrt{3xy}$ в точці $M_0(3;4)$.

❍ Знайдемо градієнти заданих скалярних функцій:

$$z'_x|_{M_0}=\left.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{M_0}=\frac{3}{5},\ z'_y|_{M_0}=\left.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{M_0}=\frac{4}{5},$$

$$\operatorname{grad}z(M_0)=\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right),|\operatorname{grad}z(M_0)|=\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}=1;$$

$$u'_x|_{M_0}=\left.\left(1+\frac{\sqrt{3y}}{2\sqrt{x}}\right)\right|_{M_0}=2,\ u'_y|_{M_0}=\left.\left(-3+\frac{\sqrt{3x}}{2\sqrt{y}}\right)\right|_{M_0}=-\frac{9}{4},$$

$$\operatorname{grad}u(M_0)=\left(2;-\frac{9}{4}\right),|\operatorname{grad}u(M_0)|=\sqrt{4+\frac{81}{16}}=\frac{\sqrt{145}}{4}.$$

Тоді кут між градієнтами знаходимо за формулою

$$\cos\varphi=\frac{(\operatorname{grad}z,\operatorname{grad}u)}{|\operatorname{grad}z|\cdot|\operatorname{grad}u|}=\frac{2\cdot\frac{3}{5}-\frac{9}{4}\cdot\frac{4}{5}}{\frac{\sqrt{145}}{4}}=-\frac{12}{5\sqrt{145}}.$$

Отже,

$$\varphi=\pi-\arccos\frac{12}{5\sqrt{145}}.●$$

Навчальна задача 3.6. Знайти кут між градієнтами скалярного поля $z=\ln\frac{y+1}{x}$ в точках $M_1\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{4}\right)$ і $M_2(1;0)$.

❍Знайдемо градієнт заданої функції в точках M_1 і M_2:

$$z'_x = -\frac{1}{x},\ z'_y = \frac{1}{y+1};$$

$$\operatorname{grad} z\left(M_1\right) = \left(-2;4\right), \left|\operatorname{grad} z\left(M_1\right)\right| = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5};$$

$$\operatorname{grad} z\left(M_2\right) = \left(-1;1\right), \left|\operatorname{grad} z\left(M_2\right)\right| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Тоді

$$\cos\varphi = \frac{2+4}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{10}},\ \varphi = \arccos\frac{3}{\sqrt{10}}.\ \bullet$$

Навчальна задача 3.7.

Знайти кут між градієнтами скалярних полів $u = \dfrac{yz^2}{x^2}$ і $v = \dfrac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$ в точці $M_0\left(\sqrt{2}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

❍ Маємо:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = -\left.\frac{2yz^2}{x^3}\right|_{M_0} = -\frac{1}{6},\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.\frac{z^2}{x^2}\right|_{M_0} = \frac{1}{6},\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = \left.\frac{2yz}{x^2}\right|_{M_0} = \frac{1}{\sqrt{6}};$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\frac{3}{2}x^2\right|_{M_0} = 3,\ \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.18y^2\right|_{M_0} = 9,\ \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{M_0} = \left.9\sqrt{6}z^2\right|_{M_0} = 3\sqrt{6}.$$

Таким чином,

$$\operatorname{grad} u\left(M_0\right) = \left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \operatorname{grad} v\left(M_0\right) = \left(3; 9; 3\sqrt{6}\right),$$

$$\left|\operatorname{grad} u\left(M_0\right)\right| = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{2}}{3}, \left|\operatorname{grad} v\left(M_0\right)\right| = \sqrt{9+81+54} = 12.$$

Тоді

$$\cos\varphi = \frac{\left(\operatorname{grad} u\left(M_0\right), \operatorname{grad} v\left(M_0\right)\right)}{\left|\operatorname{grad} u\left(M_0\right)\right|\cdot\left|\operatorname{grad} v\left(M_0\right)\right|} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \varphi = \frac{\pi}{4}.\ \bullet$$

Навчальна задача 3.8.

Побудувати лінію рівня скалярного поля $z = x^2 + y^2$, що проходить через точку $M_0\left(3;4\right)$, знайти та побудувати градієнт функції z в цій точці.

❍ Лінії рівня скалярного поля визначаються з рівняння $x^2 + y^2 = C^2$ і складають сукупність кіл з ценром у початку координат. Коло, що проходить через точку $M_0\left(3;4\right)$ задається рівнянням $x^2 + y^2 = 25$ (рис. 3.2).

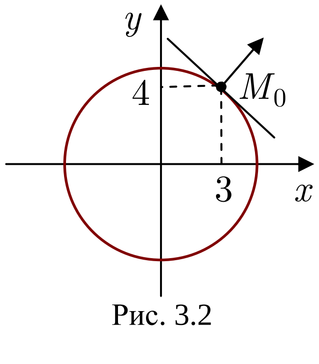

Рис. 3.2

Знайдемо градієнт поля z в точці M_0:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = 2x|_{M_0} = 6,\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = 2y|_{M_0} = 8,$$

$$\operatorname{grad} z(M_0) = (6;8),\ |\operatorname{grad} z(M_0)| = \sqrt{36+64} = 10.$$

Як відомо, градієнт напрямлений вздовж нормалі до лінії рівня скалярного поля, тому будуємо $\operatorname{grad} z$ вздовж нормалі до кола $x^2+y^2=25$ в точці M_0, відкладаючи довжину градієнта.●

Навчальна задача 3.9. Визначити напрям $\vec{l}$, що утворює з додатним напрямом осі Ox кут α, за яким поле $z = \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ у точці $M_0(1;3)$ має найбільшу, найменшу похідну або похідну, що дорівнює нулю.

❍Обчислимо похідну скалярного поля $z(x,y)$ в точці M_0 за напрямом вектора $\vec{l}$, який утворює кут α з додатним напрямом осі Ox. Маємо

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}\cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}\sin\alpha = \left.\left(-\frac{y}{x^2} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}\right)\right|_{M_0}\cos\alpha +$$

$$+\left.\frac{1}{x}\right|_{M_0}\sin\alpha = -\frac{7}{2}\cos\alpha + \sin\alpha.$$

Для відшукання напряму $\vec{l}$, за яким функція набуває найбільшого і найменшого значень, дослідимо на екстремум визначену і диференційовну функцію

$$u(\alpha) = -\frac{7}{2}\cos\alpha + \sin\alpha.$$

Знайдемо критичні точки функції $u(\alpha)$:

$$u'(\alpha) = \frac{7}{2}\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\operatorname{arctg}\frac{2}{7} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки α — кут між вектором $\vec{l}$ і віссю Ox, то $\alpha \in [0;2\pi]$. Тому маємо дві критичні точки:

$$\alpha_1 = \pi - \operatorname{arctg}\frac{2}{7},\ \alpha_2 = 2\pi - \operatorname{arctg}\frac{2}{7}.$$

Перевіримо наявність екстремуму в критичних точках за другою похідною:

$$u''(\alpha) = \frac{7}{2}\cos\alpha - \sin\alpha;$$

$$u''(\alpha_1)=\frac{7}{2}\cos\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{2}{7}\right)-\sin\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{2}{7}\right)=$$

$$=-\frac{7}{2}\cos\operatorname{arctg}\frac{2}{7}-\sin\operatorname{arctg}\frac{2}{7}=-\frac{7}{2}\cdot\frac{7}{\sqrt{53}}-\frac{2}{\sqrt{53}}<0;$$

$$u''(\alpha_2)=\frac{7}{2}\cos\left(2\pi-\operatorname{arctg}\frac{2}{7}\right)-\sin\left(2\pi-\operatorname{arctg}\frac{2}{7}\right)=$$

$$=\frac{7}{2}\cos\operatorname{arctg}\frac{2}{7}+\sin\operatorname{arctg}\frac{2}{7}=\frac{47}{2\sqrt{53}}+\frac{2}{\sqrt{53}}>0.$$

Отже, при $\alpha_1=\pi-\operatorname{arctg}\frac{2}{7}$ похідна $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0}$ набуває максимуму, причому

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l_1}\right|_{M_0}=\left(\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0}\right)_{\max}=-\frac{7}{2}\cos\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{2}{7}\right)+\sin\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{2}{7}\right)=$$

$$=-\frac{7}{2}\left(-\frac{7}{\sqrt{53}}\right)+\frac{2}{\sqrt{53}}=\frac{\sqrt{53}}{2},\quad \vec{l}_1=-\frac{7}{\sqrt{53}}\vec{i}+\frac{2}{\sqrt{53}}\vec{j}=\frac{1}{\sqrt{53}}\left(-7\vec{i}+2\vec{j}\right).$$

В точці $\alpha_2=2\pi-\operatorname{arctg}\frac{2}{7}$ похідна $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0}$ за напрямом $\vec{l}_2=\frac{1}{\sqrt{53}}\left(7\vec{i}+2\vec{j}\right)$ має мінімум , причому

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l_2}\right|_{M_0}=\left(\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0}\right)_{\min}=-\frac{\sqrt{53}}{2}.$$

Похідна $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0}$ дорівнює нулю в точках, що є розв'язками рівняння

$$-\frac{7}{2}\cos\alpha+\sin\alpha=0.$$

На відрізку $[0;2\pi]$ це рівняння має два кореня:

$$\alpha_3=\operatorname{arctg}\frac{7}{2},\alpha_4=\pi+\operatorname{arctg}\frac{7}{2}.$$

Отже, похідна $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0}=0$ за напрямом $\vec{l}_3=\frac{1}{\sqrt{53}}\left(2\vec{i}+7\vec{j}\right)$, який утворює з додатним напрямом осі Ox кут $\alpha_3=\operatorname{arctg}\frac{7}{2}$ і напрямом $\vec{l}_4=-\frac{1}{\sqrt{53}}\left(2\vec{i}+7\vec{j}\right)$, який утворює з додатним напрямом осі Ox кут $\alpha_4=\pi+\operatorname{arctg}\frac{7}{2}$.

Таким чином,

$$\left(\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0}\right)_{\max}=\frac{\sqrt{53}}{2}\text{ за напрямом }\vec{l}_1=\frac{1}{\sqrt{53}}\left(-7\vec{i}+2\vec{j}\right);$$

$$\left(\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0}\right)_{\min}=-\frac{\sqrt{53}}{2}\text{ за напрямом }\vec{l}_2=\frac{1}{\sqrt{53}}\left(7\vec{i}+2\vec{j}\right);$$

$\left.\dfrac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0} = 0$ за напрямами $\vec{l}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{53}}\left(2\vec{i} + 7\vec{j}\right)$ і $\vec{l}_4 = -\dfrac{1}{\sqrt{53}}\left(2\vec{i} + 7\vec{j}\right)$.●

2. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 3.1. Знайти величину та напрям градієнта скалярного поля $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 6}$ в точці $M_0(3;1)$. Побудувати градієнт.

❍ $\operatorname{grad} z(M_0) = \left(\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{4}\right), |\operatorname{grad} z(M_0)| = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$. ●

Задача 3.2. В яких точках поля $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ виконується умова $|\operatorname{grad} z| = 1$?

❍В точках кола $x^2 + y^2 = 1$.●

Задача 3.3. Знайти кут між градієнтами поля $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ в точках $A(1;2;2)$ і $B(-3;1;0)$.

❍ $\varphi = \pi - \arccos\dfrac{8}{9}$. ●

Задача 3.4. Знайти кут між градієнтами скалярних полів $u = xyz$ і $v = x^2 + 9y^2 + 6z^2$ у точці $M_0\left(1;\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

❍ $\varphi = 0$. ●

Задача 3.5. Знайти проекцію градієнта функції $u = \sqrt{x^2 - 2x + y^2 + z^2 + 1}$ в точці $A(2;1;1)$ на градієнт функції $v = xyz - yz$ в точці $B(2;2;1)$.

❍ $\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$. ●

Задача 3.6. Знайти похідну скалярного поля $u = x^2 \operatorname{arctg} y + x\ln\left(x + z^2\right)$ в напрямі вектора $\vec{l} = 6\vec{j} + \vec{k}$ у точці $M_0(1;3;-3)$.

❍0. ●

Задача 3.7. Знайти похідну скалярного поля $u = x\sqrt{y} - yz^2$ в точці $M_0(2;1;-1)$ за напрямом нормалі до поверхні $\sigma : x^2 + y^2 = 4z$, що утворює гострий кут з додатним напрямом осі Oz.

❍ 6.●

Задача 3.8. Знайти похідну скалярного поля $z = \ln(x + y)$ в точці $M_0(1;2)$ параболи $y^2 = 4x$ за напрямом цієї параболи.

❍ $\frac{\sqrt{2}}{3}$. ●

Задача 3.9. Знайти величину і напрям найбільшої зміни поля $u = x + \operatorname{tg} x + 2\sin y + z - \operatorname{ctg} z$ в точці $M_0\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{6}\right)$.

❍ $\max \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_A = \sqrt{35}$; $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{35}}, \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{35}}, \cos\gamma = \frac{5}{\sqrt{35}}$. ●