Лекція 3. Похідна скалярного поля за напрямом

Короткий зміст

Короткий зміст

У цій лекції:

— розглянуто поняття скалярного та векторного полів;

— запроваджено означення та формули знаходження похідної скалярного поля за напрямом.

3.1. Поняття скалярного та векторного поля

Простір $\mathbb{R}^3$ або його частину Ω, в кожній точці якого визначено значення деякої величини, називають *полем*. Якщо кожній точці M цього простору відповідає певне число $u = u(M)$, то говорять, що визначено *скалярне поле*. Тобто скалярне поле — це скалярна функція разом зі своєю областю визначення. Приміром, скалярними полями є: поле температур, атмосферного тиску, електричного потенціалу.

Якщо кожній точці M простору відповідає деякий вектор $\vec{a} = \vec{a}(M)$, то говорять, що задано *векторне поле*. Приміром, векторними полями є: силове поле, поле швидкостей часток рідини, магнітне поле.

Якщо функція $u(M)$ (або $\vec{a}(M)$) не залежить від часу, то скалярне (векторне) поле називають *стаціонарним*. Поле, що змінюється з часом називають *нестаціонарним*.

Якщо Ω — частина простору $\mathbb{R}^3$, то стаціонарне поле u — функція змінних x, y, z: $u = u(x, y, z)$.

Якщо поле $u = u(x, y)$ залежить від двох змінних, то його називають *плоским*.

Скалярні поля можна характеризувати за допомогою поверхонь і ліній рівня. *Поверхня рівня* скалярного поля $u = u(x, y, z)$ — це множина точок, в яких значення поля стале. Рівняння поверхні рівня:

$$u(x, y, z) = c = \text{const}\,.$$

Часто функцію, що задає скалярне поле, незалежно від її фізичного змісту, називають *потенціалом*. Тому, поверхні рівня називають також *еквіпотенціальними поверхнями*, тобто поверхнями рівного потенціалу.

Оскільки $u = u(x, y, z)$ — однозначна функція, то кожній точці відповідає одне значення функції, тому через кожну точку поля проходить тільки одна поверхня рівня.

Приміром, для скалярного поля, утвореного функцією

$$u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}\,,$$

поверхнями рівня буде сім‘я концентричних сфер з центром в початку координат:

$$\sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} = c$$

або

$$R^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2.$$

В частинному випадку, при $c = 0$ одержимо сферу

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

що обмежує поле, а при $c = R$ — початок координат:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0\,.$$

Лінія рівня плоского скалярного поля — це множина точок площини, в яких функція $u(x, y)$ зберігає стале значення. Рівняння лінії рівня:

$$u(x,y) = c = \text{const}\,.$$

Приклади ліній рівня: на картах синоптиків – ізотерми (лінії рівних температур), ізобари (лінії рівного тиску), на топографічних картах – горизонталі (лінії, що з'єднують точки земної поверхні, які знаходяться на однаковій висоті над рівнем моря).

Лінії рівня (еквіпотенціальні лінії) знаходять широке застосування при розгляді плоскопаралельних електричних полів. Тут вони є лініями, вздовж яких електричний потенціал в усіх точках постійний. Фізично, це означає, що робота, що виконується силами електричного поля по перенесенню одиничного позитивного заряду з довільної точки даної лінії рівня в точку, потенціал якої прийнятий рівним нулеві, буде однакова. Сукупність ліній рівного потенціалу дає наочне зображення електричного поля, що полегшує його вивчення.

В математиці лінії рівня застосовують при дослідженні поверхонь (метод перерізів).

3.2. Поняття похідної скалярного поля за напрямом

Для характеристики зміни скалярного поля в заданому напрямі введемо поняття похідної за напрямом.

Нехай задано скалярне поле, яке визначають функцією $u = u(M)$. Виберемо точку M_0 і напрям, що задають вектором $\vec{l}$. Візьмемо іншу точку M так, щоб $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{l}$. Позначимо довжину вектора $\overrightarrow{M_0M}$ через Δl, а приріст функції u, що відповідає переміщенню Δl через Δu ($\Delta u = u(M) - u(M_0)$).

Розглянемо відношення

$$\frac{\Delta u}{\Delta l} = \frac{u(M) - u(M_0)}{\Delta l},$$

яке визначає середню швидкість зміни поля на одиницю довжини в заданому напрямі $\vec{l}$.

Означення 3.1. Якщо при $\Delta l \to 0$ існує скінченна границя відношення $\dfrac{\Delta u}{\Delta l}$, то її називають *похідною функції* $u = u(M)$ *в точці* M_0 *за напрямом* $\vec{l}$ і позначають $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}$.

Таким чином, за означенням

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{u(M) - u(M_0)}{\Delta l}. \tag{3.1}$$

Наведене означення не пов'язано з вибором системи координат, тобто воно *інваріантне*.

Знайдемо вираз для похідної за напрямом в декартовій системі координат. Нехай функція $u(M) = u(x,y,z)$ диференційовна в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Розглянемо значення функції $u(x,y,z)$ в точці $M(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y; z_0 + \Delta z)$. Повний приріст функції можна записати наступним чином

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - u(x_0, y_0, z_0) =$$
$$= \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \Delta x + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \Delta y + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} \cdot \Delta z + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y + \alpha_3 \Delta z,$$

де $\alpha_i, i = 1,2,3$ — нескінченно малі функції при $\Delta l \to 0$. Звідси, переходячи до границі у відношенні $\dfrac{\Delta u}{\Delta l}$ при $\Delta l \to 0$, одержимо

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta l} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta l} + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} \cdot \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta l}. \tag{3.2}$$

Оскільки $\overrightarrow{M_0 M} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} + \Delta z \vec{k}$, то відношення $\dfrac{\Delta x}{\Delta l}, \dfrac{\Delta y}{\Delta l}, \dfrac{\Delta z}{\Delta l}$ є напрямними косинусами вектора $\overrightarrow{M_0 M}$. Враховуючи, що $\overrightarrow{M_0 M} \parallel \vec{l}$, напрямні косинуси векторів $\overrightarrow{M_0 M}$ і $\vec{l}$ рівні. Тобто,

$$\frac{\Delta x}{\Delta l} = \cos\alpha, \ \frac{\Delta y}{\Delta l} = \cos\beta, \ \frac{\Delta z}{\Delta l} = \cos\gamma,$$

де

$$\vec{l}^{\,0} = \frac{\vec{l}}{\left|\vec{l}\right|} = \cos\alpha \vec{i} + \cos\beta \vec{j} + \cos\gamma \vec{k} \ —$$

орт вектора $\vec{l}$.

Оскільки $M \to M_0$ вздовж прямої, паралельної вектору $\vec{l}$, то кути α, β, γ — залишаються сталими, а тому

$$\lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta l} = \cos\alpha, \ \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta l} = \cos\beta, \ \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta l} = \cos\gamma. \tag{3.3}$$

Остаточно з рівностей (3.2), (3.3) маємо формулу для обчислення похідної скалярної функції за напрямом

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} \cos\gamma. \tag{3.4}$$

Для плоского поля $u = u(x, y)$, оскільки $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$, похідну за напрямом шукаємо за формулою

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \sin\alpha, \tag{3.5}$$

де α — кут між вектором $\vec{l}$ і віссю Ox.

Абсолютна величина $\left|\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|$ відповідає абсолютному значенню швидкості, а знак похідної визначає характер зміни скалярного поля $u = u(M)$. Якщо $\dfrac{\partial u}{\partial l} > 0$, то в заданому напрямі поле зростає, якщо $\dfrac{\partial u}{\partial l} < 0$, то поле спадає.

За напрямом, дотичним до еквіпотенціальної поверхні, похідна від $u(x, y, z)$ дорівнює нулеві:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 0.$$

Для цього, розглянемо довільну криву, що лежить на поверхні рівня. Вздовж такої кривої $\Delta u = 0$, звідки і випливає рівність нулеві похідної.

Зауваження 3.1.

1. Частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ є похідними функції u за напрямом координатних осей Ox, Oy, Oz відповідно.
2. Формули (3.4), (3.5) для обчислення похідної за напрямом $\vec{l}$ в даній точці M_0 залишаються справедливими і в разі прямування точки M до точки M_0 вздовж кривої, для якої вектор $\vec{l}$ є дотичним в точці M_0, тобто напрямом кривої вважається напрям дотичної до цієї кривої в заданій точці.

Приклад 3.1.

Обчислити похідну скалярного поля $u = \operatorname{arctg}(xy)$ в точці $M_0(1;1)$, що належить параболі $y = x^2$ за напрямом цієї кривої в бік зростання ординати.

❍Напрямом $\vec{l}$ параболи $y = x^2$ в точці $M_0(1;1)$ вважається напрям дотичної до параболи в цій точці (рис. 7.1). Нехай кут між дотичною до параболи в точці M_0 і віссю Ox — α. Тоді, як відомо з геометричного змісту похідної до функції в точці: $\operatorname{tg}\alpha = y'(x)\big|_{x=1} = 2x|_{x=1} = 2$.

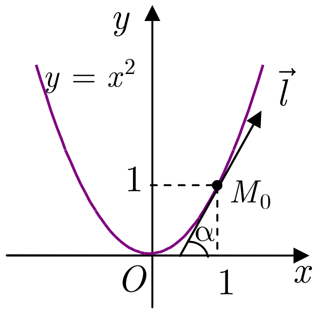

Рис. 3.1

Знайдемо напрямні косинуси дотичної:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Обчислимо значення частинних похідних $\frac{\partial u}{\partial x}$ і $\frac{\partial u}{\partial y}$ в точці $M_0(1;1)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\frac{y}{1+x^2y^2}\right|_{M_0} = \frac{1}{2}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.\frac{x}{1+x^2y^2}\right|_{M_0} = \frac{1}{2}.$$

За формулою (7.5) для похідної за напрямом одержуємо

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}.\ \bullet$$

Приклад 3.2. Знайти похідну скалярного поля $u = y\ln\left(1+x^2\right) - \operatorname{arctg} z$ в точці $M_0\,(0;1;1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$.

❍Похідну скалярного поля знайдемо за формулою (3.4):

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\cos\gamma.$$

Знайдемо частинні похідні функції $u(x,y,z)$ в точці M_0 і напрямні косинуси вектора $\vec{l}$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\frac{2xy}{1+x^2}\right|_{M_0} = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.\ln\left(1+x^2\right)\right|_{M_0} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = -\left.\frac{1}{1+z^2}\right|_{M_0} = -\frac{1}{2};$$

$$\left|\vec{l}\right| = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{17}},\ \cos\beta = -\frac{3}{\sqrt{17}},\ \cos\gamma = -\frac{2}{\sqrt{17}}.$$

Таким чином,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = 0\cdot\frac{2}{\sqrt{17}} - 0\cdot\frac{3}{\sqrt{17}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17}.\ \bullet$$