

Лекція 2. Обчислення поверхневого інтеграла другого роду

Короткий зміст

Розділ 2.1. *Методи обчислення поверхневого інтеграла другого роду*

2.1.1. *Метод проєкції на всі координатні площини*

2.1.2. *Метод проєкції на одну координатну площину*

Розділ 2.2. *Формула Остроградського – Гауса*

Короткий зміст

У цій лекції:

— запроваджено методи обчислення поверхневого інтеграла другого роду, що дозволяють звести поверхневий інтеграл до подвійного;

— наведено формулу Остроградського – Гауса, що дозволяє звести поверхневий інтеграл другого роду по замкненій поверхні до потрійного інтеграла за просторовою областю, обмеженою цією поверхнею.

2.1. Методи обчислення поверхневого інтеграла другого роду

2.1.1. Метод проєкції на всі координатні площини

Нехай поверхня Σ , яка задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$, однозначно проєктується на всі три координатні площини. В цьому випадку рівняння поверхні однозначно розв'язується відносно кожної із змінних x, y, z , тобто

$$x = x(y, z), \quad y = y(x, z), \quad z = z(x, y).$$

Позначимо проєкції Σ на координатні площини Oxy, Oyz, Oxz через D_{xy}, D_{yz}, D_{xz} відповідно. Нехай

$$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Розглянемо поверхневий інтеграл другого роду від векторної функції \vec{a} по поверхні Σ :

$$\iint_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{n}^0) d\sigma = \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy. \quad (2.1)$$

Розглянемо спочатку інтеграл $\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy$, рівняння поверхні Σ запишемо у вигляді

$$z = z(x, y), \quad (x, y) \in D_{xy}.$$

Тоді

$$\iint_{\Sigma: z=z(x,y)} R(x, y, z) dx dy = \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cos \gamma d\sigma.$$

Враховуючи, що $\cos \gamma d\sigma = \pm dx dy$ і в точках поверхні $z = z(x, y)$, маємо

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy, \quad (2.2)$$

причому знак перед інтегралом в правій частині рівності співпадає зі знаком $\cos \gamma$, тобто, якщо $\cos \gamma > 0$ ($\gamma = (\vec{n}^0, \vec{k})$ — гострий) беремо знак «плюс», якщо $\cos \gamma < 0$ ($\gamma = (\vec{n}^0, \vec{k})$ — тупий) беремо знак «мінус».

Аналогічно

$$\iint_{\Sigma: x=x(y,z)} P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dy dz, \quad (2.3)$$

$$\iint_{\Sigma: y=y(x,z)} Q(x, y, z) dx dz = \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z) dx dz. \quad (2.4)$$

Таким чином, поверхневий інтеграл (2.1) знаходимо як суму трьох інтегралів (2.2) — (2.4), кожний з яких обчислюється як подвійний інтеграл за проєкцією поверхні Σ на відповідну координатну площину:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy = \\ & = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dydz \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z) dx dz \pm \\ & \quad \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Знаки перед подвійними інтегралами співпадають зі знаками відповідних напрямних косинусів нормалі до обраної сторони поверхні.

Зауваження 2.1.

Якщо поверхня Σ неоднозначно проектується на яку-небудь координатну площину, то цю поверхню потрібно розбити на частини, кожна з яких проектується однозначно, а інтеграл (2.1), згідно з властивістю 2 поверхневих інтегралів другого роду, дорівнюватиме сумі інтегралів по одержаним частинам.

Приклад 2.1.

Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $I = \iint_{\Sigma} (y - z) dydz + (z - x) dx dz + (x - y) dx dy$, де Σ — зовнішня сторона конічної поверхні $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z < h$.

○ Обчислимо поверхневий інтеграл методом проекції на всі координатні площини. Позначимо

$$I_1 = \iint_{\Sigma} (z - x) dx dz; \quad I_2 = \iint_{\Sigma} (y - z) dy dz; \quad I_3 = \iint_{\Sigma} (x - y) dx dy.$$

Задана поверхня на координатну площину Oxz проектується неоднозначно (рис. 2.1).

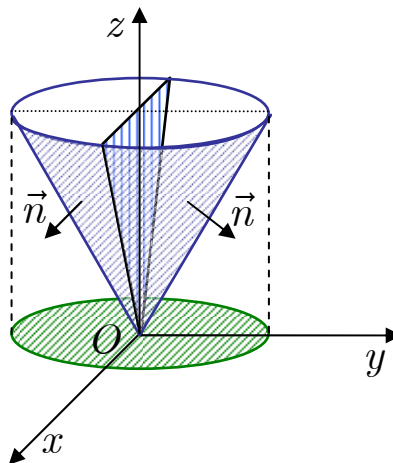


Рис. 2.1.

Тому розіб'ємо поверхню Σ на дві частини, кожна з яких на Oxz проектується однозначно:

$$I_1 = \iint_{\Sigma} (z - x) dx dz = \iint_{\Sigma_1} (z - x) dx dz + \iint_{\Sigma_2} (z - x) dx dz,$$

де Σ_1 — частина поверхні конуса праворуч від площини Oxz , а Σ_2 — частина, що міститься ліворуч. Кожна з поверхонь Σ_1 і Σ_2 на площину Oxz проектується в одну й ту ж область D_{xz} , а зовнішня нормаль до σ_1 утворює з віссю Oy гострий кут, до Σ_2 — тупий.

Отже,

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{\Sigma} (z - x) dx dz = \iint_{\Sigma_1} (z - x) dx dz + \iint_{\Sigma_2} (z - x) dx dz = \\ &= \left| \begin{aligned} \iint_{\Sigma_1} (z - x) dx dz &= + \iint_{D_{xz}} (z - x) dx dz \\ \iint_{\Sigma_2} (z - x) dy dz &= - \iint_{D_{xz}} (z - x) dx dy \end{aligned} \right| = \\ &= \iint_{D_{xz}} (z - x) dx dz - \iint_{D_{xz}} (z - x) dx dz = 0. \end{aligned}$$

Аналогічно, якщо проектувати поверхню на площину Oyz :

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{\Sigma} (y - z) dy dz = \iint_{\Sigma'_1} (y - z) dy dz + \iint_{\Sigma'_2} (y - z) dy dz = \\ &= \iint_{D_{yz}} (y - z) dy dz - \iint_{D_{yz}} (y - z) dy dz = 0. \end{aligned}$$

На площину Oxy поверхня Σ проектується однозначно в круг $D_{xy} = \{x^2 + y^2 \leq h^2\}$. Зовнішня нормаль до поверхні конуса утворює з віссю Oz тупий кут, тому перед подвійним інтегралом в правій частині формули (2.2) потрібно взяти знак « \leftarrow »:

$$\begin{aligned} I_3 &= \iint_{\Sigma} (x - y) dx dy = - \iint_{D_{xy}} (x - y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h (\rho \cos \varphi - \rho \sin \varphi) \rho d\rho = \\ &= \underbrace{\int_0^{2\pi} (\cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi}_{=0} \int_0^h \rho^2 d\rho = 0. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 0. \bullet$$

2.1.2. Метод проєкції на одну координатну площину

Нехай поверхня Σ однозначно проектується на область D_{xy} площини Oxy . Тоді її можна задати рівнянням $z = z(x, y)$. Вектор нормалі \vec{n}_1 до поверхні Σ можна подати у вигляді $\vec{n}_1 = (-z'_x; -z'_y; 1)$. Оскільки $(\vec{n}_1, \vec{k}) = 1 > 0$, то заданий

вектор нормалі утворює гострий кут з віссю Oz . Зазначимо, що розглядаючи вектор нормалі \vec{n}_1 , орієнтація поверхні не враховувалась.

Нехай \vec{n} — нормаль до орієнтованої поверхні Σ , тоді $\vec{n} = \vec{n}_1$, якщо обрана верхня сторона поверхні і $\vec{n} = -\vec{n}_1$, якщо розглядається нижня сторона. Отже, орт $\vec{n}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ вектора \vec{n} задається формулою:

$$\vec{n}^0 = \pm \frac{(-z'_x; -z'_y; 1)}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}},$$

знак «плюс» перед дробом береться, якщо кут γ між віссю Oz і ортом \vec{n}^0 гострий, тобто $\cos \gamma > 0$; а знак «мінус», якщо $\cos \gamma < 0$. Враховуючи, що диференціал площі поверхні має вигляд

$$d\sigma = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} dx dy,$$

для обчислення поверхневого інтеграла другого роду від векторної функції $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ по поверхні Σ одержуємо формулу:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy &= \iint_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{n}^0) d\sigma = \\ &= \pm \iint_{D_{xy}} [P(x, y, z(x, y))(-z'_x) + Q(x, y, z(x, y))(-z'_y) + R(x, y, z(x, y))] dx dy. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Знак перед подвійним інтегралом у формулі (2.5) співпадає зі знаком $\cos \gamma$.

Приклад 2.2.

Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $I = \iint_{\Sigma} -z dx dz + (\sqrt{z} - x) dx dy$, де Σ — зовнішня сторона частини поверхні $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ($0 \leq z < 1$).

○ Заданий поверхневий інтеграл обчислимо, проектуючи частину поверхні еліптичного параболоїда (рис. 2.2) на площину Oxy .

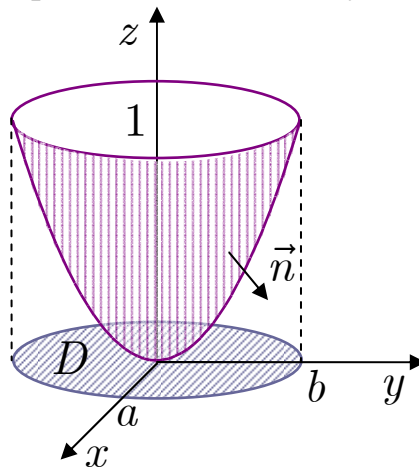


Рис. 2.2.

За формулою (2.5), враховуючи, що $\cos \gamma < 0$, маємо

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{\Sigma} -z dx dz + (\sqrt{z} - x) dx dy = \left| \begin{array}{l} z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ z'_y = \frac{2y}{b^2} \end{array} \right| = \\
&= - \iint_D \left[- \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \left(- \frac{2y}{b^2} \right) + \left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} - x \right) \right] dx dy = \\
&= \left| \begin{array}{l} x = a\rho \cos \varphi, y = b\rho \sin \varphi \\ |J| = ab\rho, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right| = \\
&= - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\underbrace{\frac{2\rho^3 \sin \varphi}{b^2}}_{=0} + \rho - \underbrace{\rho \cos \varphi}_{=0} \right) ab\rho d\rho = -2\pi ab \cdot \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_0^1 = -\frac{2\pi ab}{3}. \bullet
\end{aligned}$$

2.2. Формула Остроградського — Гауса

Формула Остроградського — Гауса встановлює зв'язок між поверхневим інтегралом другого роду по замкненій поверхні і потрійним інтегралом по просторовій області, обмеженій цією поверхнею.

Нехай $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$, Σ — замкнена поверхня. Поверхневий інтеграл від векторної функції \vec{a} по замкненій поверхні Σ будемо позначати

$$\oiint_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{n}^0) d\sigma = \oiint_{\Sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy.$$

Наведемо наступну теорему.

Теорема 2.1.

Нехай в замкненій області $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ неперервні разом із своїми похідними $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$, тоді справедлива формула

$$\begin{aligned}
&\oiint_{\Sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy = \\
&= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz, \tag{2.6}
\end{aligned}$$

де Σ — межа області Ω і інтегрування по замкненій поверхні Σ відбувається в напрямі зовнішньої нормалі.

Рівність (2.6) називають *формулою Остроградського — Гауса*.

► Нехай область Ω обмежена знизу поверхнею Σ_1 , рівняння якої $z = z_1(x, y)$; зверху — поверхнею Σ_2 , рівняння якої $z = z_2(x, y)$, збоку — циліндричною поверхнею Σ_3 , твірні якої паралельні осі Oz (рис. 2.3).

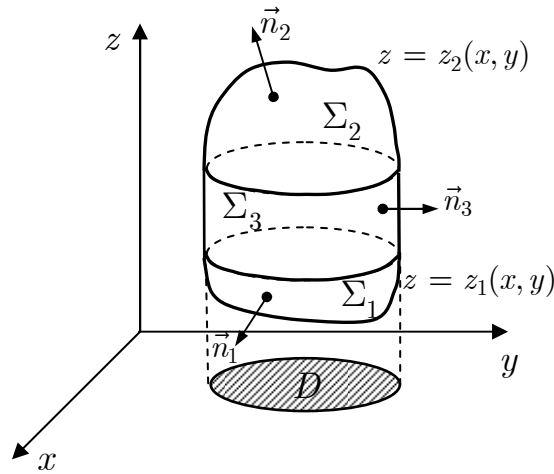


Рис. 2.3

Розглянемо потрійний інтеграл

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_D dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \\ &= \iint_D R(x, y, z_2(x, y)) dx dy - \iint_D R(x, y, z_1(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Подвійні інтеграли в правій частині рівності замінимо поверхневими інтегралами другого роду по зовнішній стороні поверхонь Σ_2 і Σ_1 відповідно. Враховуючи для кожного інтеграла кут між нормаллю та віссю Oz ($\gamma_1 = (\vec{n}_1, ^\wedge Oz) > \frac{\pi}{2}$, $\gamma_2 = (\vec{n}_2, ^\wedge Oz) < \frac{\pi}{2}$), одержимо

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\Sigma_2} R dx dy + \iint_{\Sigma_1} R dx dy.$$

Якщо до останньої рівності додати інтеграл $\iint_{\Sigma_3} R dx dy$, якій дорівнює ну-

лю за властивістю 4, остаточно маємо

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\Sigma_2} R dx dy + \iint_{\Sigma_1} R dx dy + \iint_{\Sigma_3} R dx dy$$

або

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \oiint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy, \quad (2.7)$$

де Σ — поверхня, що обмежує просторову область Ω .

Аналогічно доводимо формули

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \oiint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz, \quad (2.8)$$

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \oiint_{\Sigma} Q(x, y, z) dx dz. \quad (2.9)$$

Додавши почленно рівності (2.7) — (2.9), одержуємо формулу Остроградського — Гауса (2.6). ◀

Зауваження 2.2.

1) Формула (2.6) залишається справедливою для будь-якої області Ω , яку можна розбити на скінченну кількість правильних областей.

2) Формулу Остроградського — Гауса зручно застосовувати для обчислення поверхневих інтегралів другого роду по замкнених поверхнях.

Приклад 2.3.

Обчислити поверхневий інтеграл

$\oiint_{\Sigma} -x dy dz + zx^2 dx dy + 15 dx dy$, де Σ — зовнішня сторона піраміди, обмеженої площинами $2x - 3y + z = 6, x = 0, y = 0, z = 0$.

○ Запишемо рівняння площини $2x - 3y + z = 6$ у відрізка на осях:

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1$$

і побудуємо поверхню Σ (рис. 2.4).

Оскільки поверхня замкнена, то поверхневий інтеграл другого роду знайдемо за формулою Остроградського — Гауса. Таким чином,

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} -x dy dz + zx^2 dx dy + 15 dx dy &= \left| \frac{\partial P}{\partial x} = -1, \frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \frac{\partial R}{\partial z} = 0 \right| = \\ &= \iiint_{\Omega} (-1 + 0 + 0) dx dy dz = - \iiint_{\Omega} dx dy dz = -V = -\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 6 = -6. \end{aligned}$$

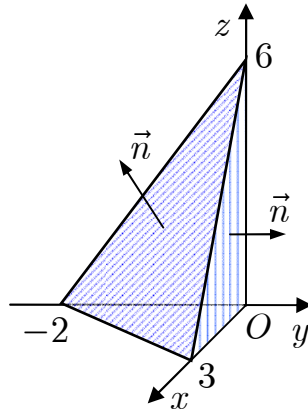


Рис. 2.4

Отже, заданий поверхневий інтеграл дорівнює об'єму піраміди, взятому із знаком мінус:

$$\oiint_{\Sigma} -x dy dz + zx^2 dx dy + 15 dx dy = -6. \bullet$$