

## 1. Розв'язання навчальних задач

### Навчальна задача 1.1.

Обчислити поверхневий інтеграл другого роду  $I = \iint_{\sigma} xz^2 dx dy$ , де  $\sigma$  — зовнішня сторона частини сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , розміщена в першому октанті.

○ Задана поверхня однозначно проектується на площину  $Oxy$  в чверть круга (рис. 1.1).

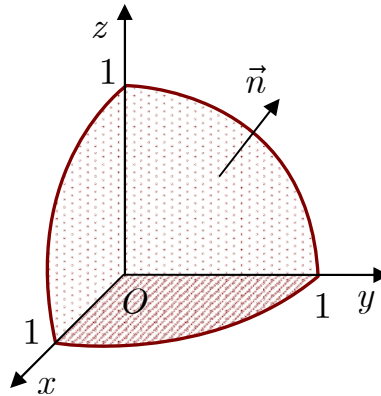


Рис. 1.1

За формулою проєкції на одну координатну площину, враховуючи, що  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ , одержимо

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{\sigma} xz^2 dx dy = \iint_D x(1 - x^2 - y^2) dx dy = \left. \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ |J| = \rho \end{array} \right| = \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho \cos \varphi (1 - \rho^2) \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^2 (1 - \rho^2) d\rho = \\
 &= (\sin \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left( \frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{15} \bullet
 \end{aligned}$$

### Навчальна задача 1.2.

Обчислити поверхневий інтеграл другого роду  $I = \iint_{\sigma} 4x^3 dy dz + 4y^3 dx dz - 6z^4 dx dy$ , де  $\sigma$  — зовнішня сторона поверхні тіла, обмеженого поверхнями  $x^2 + y^2 = a^2$  і  $z = 0, z = h$ .

○ Потрібно обчислити інтеграл по замкненій поверхні, обмеженій частиною циліндра  $x^2 + y^2 = a^2$  і площинами  $z = 0, z = h$  (рис. 1.2).

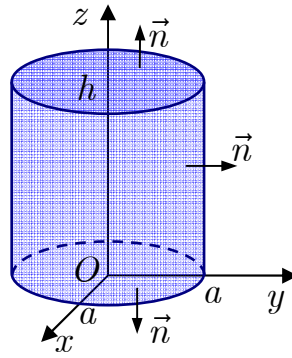


Рис. 1.2

Маємо

$$P(x, y, z) = 4x^3, Q(x, y, z) = 4y^3, R(x, y, z) = -6z^4;$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 12x^2; \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 12y^2; \quad \frac{\partial R}{\partial z} = -24z^3.$$

Застосовуючи формулу Остроградського — Гаусса, знаходимо

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\sigma} 4x^3 dydz + 4y^3 dx dz - 6z^4 dx dy = 12 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 - 2z^3) dx dy dz = \\ &= 12 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho d\rho \int_0^h (\rho^2 - 2z^3) dz = 24\pi \int_0^a \rho \left( \rho^2 z - \frac{z^4}{2} \right) \Big|_0^h d\rho = \\ &= 24\pi \int_0^a \rho \left( \rho^2 h - \frac{h^4}{2} \right) d\rho = 24\pi \left( \frac{h\rho^4}{4} - \frac{h^4\rho^2}{4} \right) \Big|_0^a = 24\pi \left( \frac{ha^4}{4} - \frac{h^4a^2}{4} \right) = \\ &= 6\pi a^2 h (a^2 - h^3). \bullet \end{aligned}$$

**Навчальна  
задача 1.3.**

Обчислити поверхневий інтеграл другого роду  $I = \iint_{\sigma} (\vec{r}, \vec{n}^0) d\sigma$ , де  $\vec{r}$  — радіус-вектор довільної точки,  $\sigma$  — зовнішня сторона поверхні тіла, обмеженого поверхнями  $z = 4 - x^2$ ,  $2x + y = 4$  і координатними площинами.

○ Поверхня тіла обмежена параболічним циліндром  $z = 4 - x^2$  і площинами  $2x + y = 4$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  (рис. 1.3).

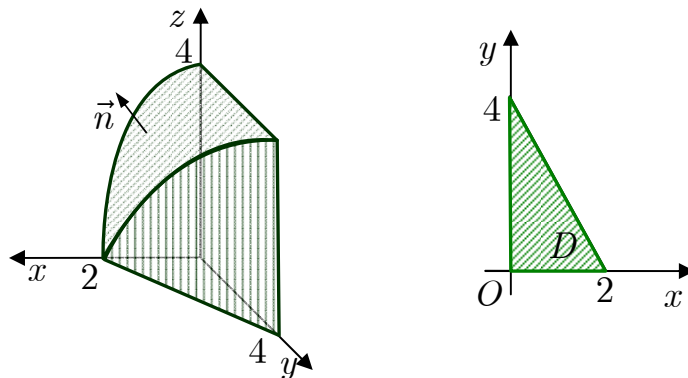


Рис. 1.3

Застосуємо формулу Остроградського — Гаусса. Оскільки

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, P = x, Q = y, R = z, \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial z} = 1,$$

маємо

$$\begin{aligned} I &= \oiint_{\sigma} xdydz + ydxdz + zdxdy = \iiint_{\Omega} (1 + 1 + 1) dxdydz = \\ &= 3 \iint_{D_{xy}} dxdy \int_0^{4-x^2} dz = 3 \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} dy \int_0^{4-x^2} dz = 3 \int_0^2 (4-x^2) dx \int_0^{4-2x} dy = \\ &= 3 \int_0^2 (4-x^2)(4-2x) dx = 6 \int_0^2 (x^3 - 2x^2 - 4x + 8) dx = \\ &= 6 \left( \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 8x \right) \Big|_0^2 = 6 \left( 4 - \frac{16}{3} - 8 + 16 \right) = 40. \bullet \end{aligned}$$

**Навчальна  
задача 1.4.**

Обчислити поверхневий інтеграл другого роду  $I = \iint_{\sigma} zdydz - xdx dz + xdx dy$ , де  $\sigma$  — внутрішня сторона частини поверхні  $x^2 + y^2 = z^2$  ( $0 \leq z < R$ ) застосувавши формулу Остроградського — Гаусса.

○ Зробимо рисунок поверхні конуса  $x^2 + y^2 = z^2$ , обмеженого площинами  $z = 0, z = R$  (рис. 1.4).

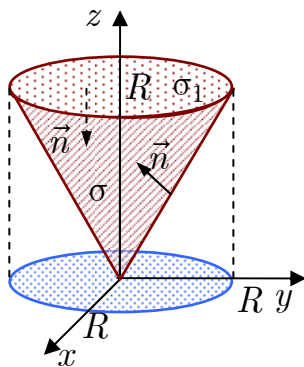


Рис. 1.4

Задана поверхня не є замкненою, тому для застосування формули Остроградського — Гаусса замкнемо поверхню конуса частиною площини  $z = R$ , що вирізається цим конусом:  $\sigma^* = \sigma \cup \sigma_1$ . Тоді

$$I = I^* - I_1,$$

де  $I^*$  — поверхневий інтеграл по замкненій поверхні  $\sigma^*$ , а  $I_1$  — інтеграл, що обчислюється по поверхні частини площини  $z = R$ .

Для обчислення інтеграла по замкненій поверхні  $\sigma^*$  застосуємо формулу Остроградського-Гаусса, враховуючи, що нормаль внутрішня:

$$I^* = \iint_{\sigma^*} zdydz - xdx dz + xdx dy = \left| \begin{array}{l} P = z, Q = -x, R = x; \\ \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \frac{\partial R}{\partial z} = 0 \end{array} \right| =$$

$$= - \iiint_{\Omega} 0 dx dy dz = 0.$$

Знайдемо інтеграл  $I_1$ . Частина площини  $z = R$  однозначно проектується на площину  $Oxy$  в круг  $D = \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$ ,  $z'_x = z'_y = 0$ . Отже, маємо

$$I_1 = \iint_{\sigma_1} zdydz - xdx dz + xdx dy = \iint_D (R \cdot 0 - x \cdot 0 + x) dx dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^2 \cos \varphi d\rho = \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi}_=0 \int_0^R \rho^2 d\rho = 0.$$

Таким чином,

$$I = I^* - I_1 = 0. \bullet$$

## 2. Задачі для самостійного розв'язання

### Задача 1.1.

Обчислити поверхневий інтеграл другого роду  $I = \iint_{\sigma} -x dy dz + z dz dx + 5 dx dy$  через верхню частину площини  $2x - 3y + z = 6$ , що відрізається координатними площинами.

○ -9. ●

### Задача 1.2.

Обчислити поверхневий інтеграл другого роду  $I = \iint_{\sigma} 2x dy dz - y dx dz$ , де  $\sigma$  — зовнішня сторона частини циліндра  $x^2 + y^2 = 1$  ( $0 < z < 1, x > 0, y > 0$ ).

○  $\frac{\pi}{4}$ . ●

### Задача 1.3.

Обчислити поверхневий інтеграл другого роду  $I = \iint_{\sigma} x^2 y^2 z dx dy$ , де  $\sigma$  — нижня сторона нижньої половини сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .

○  $\frac{2\pi R^7}{105}$ . ●

### Задача 1.4.

Обчислити поверхневий інтеграл другого роду  $I = \iint_{\sigma} (x^2 - z^2) dx dz + (z + x) dx dy$ , де  $\sigma$  — зовнішня сторона частини поверхні  $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

$-\frac{2\pi ab}{3}$ . ●

**Задача 1.5.**

$(0 \leq z < 1)$ .

Обчислити поверхневий інтеграл другого роду  $I = \iint_{\sigma} xz dx dy + xy dy dz + yz dx dz$ , де  $\sigma$  — зовнішня сторона піраміди  $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ .

$\frac{1}{8}$ . ●

**Задача 1.6.**

Обчислити поверхневий інтеграл другого роду  $I = \iint_{\sigma} (x - z^3 y) dy dz + xz dz dx + (z + xy) dx dy$ , де  $\sigma$  — зовнішня сторона поверхні тіла, обмеженого поверхнями  $x = 0, x = 1, y = 0, y = 2, z = 0, z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6}$ .

$\frac{11}{9}$ . ●

**Задача 1.7.**

Обчислити поверхневий інтеграл другого роду  $I = \iint_{\sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$ , де  $\sigma$  — зовнішня сторона поверхні еліпсоїда  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

$4\pi abc$ . ●