Лекція 1. Поверхневий інтеграл другого роду

Короткий зміст

Короткий зміст

У цій лекції:

— розглянуто поняття орієнтації поверхні, наведено означення поверхневого інтеграла другого роду (за координатами);

— встановлено зв'язок між поверхневими інтегралами першого і другого роду;

— наведено властивості поверхневого інтеграла другого роду.

1.1. Поняття поверхневого інтеграла другого роду (за координатами)

1.1.1. Орієнтація поверхні

Нехай в просторі $\mathbb{R}^3$ задана гладка або кусково-гладка поверхня Σ. Візьмемо на поверхні довільну внутрішню точку M_0 і проведемо в ній вектор нормалі певного напряму до поверхні Σ.

Якщо при обході довільного замкненого контуру, що проходить через M_0, розміщується на поверхні Σ і не перетинає межу поверхні, вектор нормалі повертається в точку M_0 з початковим напрямом, то поверхню Σ називають *двосторонньою*. Якщо при обході контуру напрям нормалі змінюється на протилежний, то поверхню називають *односторонньою*. Двосторонніми поверхнями є площина, сфера, довільна замкнена поверхня без самоперетинів тощо. Прикладом односторонньої поверхні є лист Мебіуса.

Сукупність усіх точок поверхні з вибраними в них за певним правилом напрямами нормалі визначає певну *сторону поверхні*.

Запровадимо орієнтацію поверхні. Оточимо точку $M \in \Sigma$ замкненим контуром Γ з обраним на ньому напрямом обходу (рис. 5.1). Напрям вектора нормалі $\vec{n}$ узгодимо з напрямом обходу контуру Γ за правилом правого гвинта, тобто з кінця вектора нормалі обхід контуру повинен відбуватися проти руху годинникової стрілки (в додатному напрямі). Отже, вибір додатного напряму обходу контуру на поверхні однозначно визначає сторону поверхні.

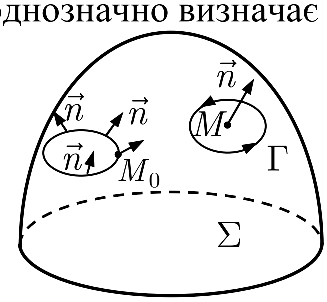

Рис. 1.1

Всі двосторонні поверхні орієнтовні, а односторонні неорієнтовні.

Якщо поверхня замкнена, то домовимось вважати за додатну орієнтацію ту, що відповідає зовнішній, а за від'ємну — внутрішній стороні поверхні.

1.1.2. Означення поверхневого інтеграла другого роду

Нехай задана двостороння гладка або кусково-гладка поверхня $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, такою є будь-яка поверхня, що задається рівнянням $z = f(x, y)$, де функції $f(x, y)$, $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ неперервні в області $D \subset \mathbb{R}^2$. Виберемо одну із сторін поверхні. В кожній точці $M \in \Sigma$ визначимо неперервну функцію $R(x, y, z)$. Розіб'ємо поверхню Σ на n елементарних частин $\Sigma_i, i = \overline{1, n}$. Позначимо через D_i проекцію частини Σ_i поверхні на площину Oxy, а через ΔS_i — площу області D_i, взяту із знаком плюс, якщо обрана верхня частина поверхні (тоді напрям обходу довільного замкненого контуру на поверхні буде співпадати з напрямом обходу відповідного контуру на проекції), і зі знаком мінус, якщо обрана нижня частина поверхні (напрями обходу контуру на поверхні і на її проекції будуть протилежними). Виберемо в кожній частині Σ_i довільну точку $M_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$ і складемо інтегральну суму

$$\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i\,. \tag{1.1}$$

Нехай $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} d(\Sigma_i)$ — максимальний діаметр часткових поверхонь Σ_i.

Означення 1.1. Якщо при $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} d(\Sigma_i) \to 0$ існує скінченна

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i\,,$$

яка не залежить ні від способу розбиття поверхні Σ на частини Σ_i, ні від вибору точок M_i, то її називають *поверхневим інтегралом другого роду (за координатами) від функції* $R(x,y,z)$ *по поверхні* Σ і позначають $\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy$.

Таким чином, за означенням

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy \overset{\text{def}}{=} \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i\,. \tag{1.2}$$

Якщо розглянути іншу сторону поверхні, то, як випливає з означення, поверхневий інтеграл змінить знак на протилежний, оскільки зміниться знак ΔS_i.

Аналогічно можна розглянути проекції поверхні Σ на координатні площини Oyz і Oxz, тоді одержимо два інших поверхневих інтеграла другого роду:

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz \text{ і } \iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)dxdz\,, \tag{1.3}$$

де $P(x,y,z), Q(x,y,z)$ — функції, визначені на поверхні Σ.

Загальним поверхневим інтегралом другого роду називають суму інтегралів (1.2), (1.3), в яких інтегрування відбувається за однією і тою самою стороною поверхні Σ:

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy\,,$$

де $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ — неперервні функції, визначені в точках поверхні Σ.

1.2. Зв'язок між поверхневими інтегралами першого і другого роду

Нагадаємо, поверхневим інтегралом першого роду від неперервної функції $f(M) = f(x,y,z)$, що задана на гладкій або кусково-гладкій поверхні Σ: $z = z(x,y)$, $(x;y)\in D$ називають інтеграл

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)d\sigma \overset{\text{def}}{=} \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta\sigma_i,$$

де $d\sigma = \sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}\,dxdy$ — диференціал площі поверхні.

Розглянемо поверхню Σ, зафіксувавши верхню її сторону, тоді нормаль $\vec{n}$ до поверхні утворює гострий кут з віссю Oz. Отже, маємо

$$\Delta S_i = \cos\gamma\cdot\Delta\sigma_i,$$

де $\Delta\sigma_i > 0$, оскільки $\Delta\sigma_i$ — площа частини Σ_i поверхні Σ; γ — кут між нормаллю $\vec{n}$ і віссю Oz, $\cos\gamma > 0$; ΔS_i — площа проекції елементарної частини Σ_i на площину Oxy.

Якщо розглянути нижню сторону поверхні Σ, то нормаль утворить тупий кут з віссю Oz і $\cos\gamma < 0$. В цьому разі площу ΔS_i елементарної області $D_i \subset Oxy$ доведеться брати зі знаком мінус.

Тому з формули (1.2) дістанемо

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma d\sigma. \tag{1.4}$$

Аналогічно, позначаючи через α і β кути, які утворює нормаль $\vec{n}$ з осями координат Ox і Oy відповідно, для інтегралів (1.3) маємо

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\cos\alpha d\sigma, \tag{1.5}$$

$$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)dxdz = \iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\cos\beta d\sigma. \tag{1.6}$$

Об'єднавши одержані результати, можна записати

$$\begin{gathered}\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy = \\ = \iint\limits_{\Sigma}\Big(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\Big)d\sigma.\end{gathered} \tag{1.7}$$

Формула (1.7) виражає поверхневий інтеграл другого роду через поверхневий інтеграл першого роду. Якщо позначити: $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, $\vec{n}^0 = (\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$ — орт вектора нормалі $\vec{n}$ до обраної сторони поверхні, то поверхневий інтеграл другого роду можна записати у векторній формі

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{\Sigma}(\vec{a},\vec{n}^0)d\sigma. \tag{1.8}$$

Зауваження 1.1.

У лівій частині формул (1.7) і (1.8) в самому позначенні поверхневого інтеграла другого роду не міститься вказівки стосовно того, яку сторону поверхні обрано, тому вибір сторони поверхні при інтегруванні доводиться зазначати кожен раз додатково. Зауважимо, що в правій частині рівності вибір сторони поверхні враховано напрямом нормалі $\vec{n}^0$.

1.3. Властивості поверхневого інтеграла другого роду

Розглянемо основні властивості поверхневого інтеграла другого роду.

Властивості

1) (*Лінійність*). Якщо для кожної з векторних функцій $\vec{a}$ і $\vec{b}$ існує поверхневий інтеграл другого роду, то для функції $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ (α, β — сталі) також існує поверхневий інтеграл другого роду, причому

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b},\vec{n}^0\right)d\sigma=\alpha\iint\limits_{\Sigma}\left(\vec{a},\vec{n}^0\right)d\sigma+\beta\iint\limits_{\Sigma}\left(\vec{b},\vec{n}^0\right)d\sigma.$$

2) (*Адитивність*). Якщо поверхню σ розбити кусково-гладкою кривою на частини σ_1 і σ_2 ($\sigma=\sigma_1\cup\sigma_2$), то

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(\vec{a},\vec{n}^0\right)d\sigma=\iint\limits_{\Sigma_1}\left(\vec{a},\vec{n}^0\right)d\sigma+\iint\limits_{\Sigma_2}\left(\vec{a},\vec{n}^0\right)d\sigma.$$

3) Поверхневий інтеграл другого роду залежить від орієнтації поверхні.

Позначимо через Σ^+ ту сторону поверхні Σ, на якій вибраний вектор нормалі $\vec{n}^0$, а через Σ^- — протилежну, тоді

$$\iint\limits_{\Sigma^+}(\vec{a},\vec{n}^0)d\sigma=-\iint\limits_{\Sigma^-}(\vec{a},\vec{n}^0)d\sigma.$$

4) Якщо $\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3$ — циліндричні поверхні з твірними, паралельними відповідно до осей Oz, Ox, Oy, то

$$\iint\limits_{\Sigma_1}R(x,y,z)dxdy=\iint\limits_{\Sigma_2}P(x,y,z)dydz=\iint\limits_{\Sigma_3}Q(x,y,z)dxdz$$

►Властивості 1) і 2) випливають з відповідних властивостей поверхневого інтеграла першого роду.

3) Дійсно, змінюючи сторону поверхні, напрям вектора нормалі $\vec{n}^0$ зміниться на протилежний. Таким чином, при зміні орієнтації поверхні знак поверхневого інтеграла другого роду змінюється на протилежний.

4) У формулах (1.4) — (1.6) для циліндричних поверхонь $\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3$ маємо відповідно $\cos\gamma=\cos\alpha=\cos\beta=0$, тому і інтеграли в правих частинах цих формул будуть рівні нулю.◄

Приклад 1.1.

Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $I=\iint\limits_{\Sigma}yzdydz+xzdxdz+xydxdy$, де Σ — зовнішня сторона поверхні трикутника, утвореного перетином площини $x+y+z=a$ з координатними площинами.

Використати формулу зведення до поверхневого інтегралу першого роду.

❍ Для обчислення поверхневого інтеграла по поверхні заданого трикутника (рис. 1.2) скористаємось формулою (1.8).

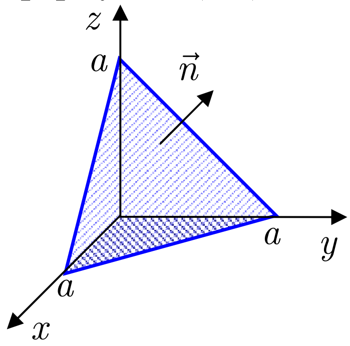

Рис. 1.2

Запишемо вектор $\vec{a}\left(M\right)$:

$$\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}\,.$$

Знайдемо орт вектора зовнішньої нормалі до площини $x + y + z = a$:

$$\vec{n} = \left(1;1;1\right) \Rightarrow \vec{n}^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Отже,

$$\left(\vec{a},\vec{n}^0\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot yz + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot xz + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot xy = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(yz + xz + xy\right).$$

Маємо

$$I = \iint\limits_{\Sigma} yzdydz + xzdxdz + xydxdy \overset{(1.8)}{=} \iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{3}}\left(yz + xz + xy\right)d\sigma =$$

$$= \left|\begin{array}{l} z = a - x - y \Rightarrow z'_x = -1, z'_y = -1 \\ d\sigma = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}dxdy = \sqrt{1^2 + \left(-1\right)^2 + \left(-1\right)^2}dxdy = \sqrt{3}dxdy \end{array}\right| =$$

$$= \iint\limits_{D} \frac{1}{\sqrt{3}}\left(y\left(a - x - y\right) + x\left(a - x - y\right) + xy\right)\cdot\sqrt{3}dxdy =$$

$$= \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{a-x} \left(ay + ax - yx - y^2 - x^2\right)dy =$$

$$= \int\limits_0^a \left(a\frac{y^2}{2} + axy - \frac{xy^2}{2} - \frac{y^3}{3} - x^2 y\right)\Bigg|_0^{a-x} =$$

$$= \int\limits_0^a \left(\frac{\left(a - x\right)^3}{2} + x\left(a - x\right)^2 - \frac{\left(a - x\right)^3}{3}\right)dx =$$

$$= \int_0^a \left(a\left(a-x\right)^2 - \frac{5}{6}\left(a-x\right)^3 \right) dx = \left(-a\frac{\left(a-x\right)^3}{3} + \frac{5}{24}\left(a-x\right)^4 \right)\Bigg|_0^a =$$

$$= \frac{a^4}{3} - \frac{5a^4}{24} = \frac{a^4}{8}. \bullet$$