# ЛЕКЦІЯ 1. ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

1.1. Інтеграл Фур'є
1.2. Інтегральне перетворення Фур'є
1.3. Властивості перетворення Фур'є
1.4. Дельта-функція Дірака

Періодичні функції або функції задані на скінченному проміжку можна за певних умов розвинути в ряд Фур'є. Інтеграл Фур'є можна вважати аналогом такого розвинення для неперіодичних функцій, які задано на нескінченному проміжку.

## 1.1. Інтеграл Фур'є

**1. Інтеграл Фур'є в дійсній формі.** Будь-яку функцію $f$, яка на відрізку $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$ справджує умови розвивності в ряд Фур'є, можна розвинути на цьому відрізку у тригонометричний ряд Фур'є:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos(\omega_n x) + b_n \sin(\omega_n x)\Big), \omega_n = \frac{2\pi}{T}n,$$

з коефіцієнтами

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(\omega_n t)dt, n = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(\omega_n t)dt, n = 1, 2, \ldots$$

Якщо функцію $f$ означено в інтервалі ширшому ніж відрізок $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$ (приміром, на всій осі), то розвинення її в ряд Фур'є відтворить значення цієї функції лише на відрізку $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$ і продовжить її на всю числову вісь як періодичну функцію з періодом $T$. Тому, якщо функцію $f(x)$ (узагалі кажучи, неперіодичну) означено на всій числовій осі, то у формулах розвинення можна спробувати спрямувати $T \to +\infty$. При цьому природно вимагати, щоб виконувались умови:

1) $f$ справджує умови розвивності в ряд Фур'є на будь-якому скінченному відрізку осі $Ox$;

2) функція $f$ *абсолютно інтегровна* на всій числовій осі, тобто

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|f(x)\right| dx = K < +\infty.$$

**Теорема 1 (Фур'є).**

Якщо функція $f$ справджує умови Діріхле на кожному скінченному відрізку (кусково-неперервна, кусково-монотонна, обмежена) і є абсолютно інтегровною, то її можна зобразити *інтегралом Фур'є*

$$I(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} \Big(A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x)\Big) d\omega,$$

де

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(\omega x) dt,$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega x) dt.$$

Причому:

1) $f(x) = I(x)$, якщо $x$ — точка неперервності функції $f$;

2) $I(x) = \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, якщо $x$ — точка розриву функції $f$..

Інтеграли для $A(\omega), B(\omega)$ розуміють у сенсі головного значення:

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx.$$

Формулу

$$f(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} \Big(A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x)\Big) d\omega,$$

називають *інтегральною формулою Фур'є*, а інтеграл, який стоїть праворуч — *інтегралом Фур'є у дійсній формі*.

Функції $A(\omega), B(\omega)$ є аналогами відповідних коефіцієнтів Фур'є $a_n$ та $b_n$ $2\pi$-періодичної функції, але коефіцієнти ряду Фур'є означені для дискретних значень $n$, тоді як $A(\omega), B(\omega)$ означені для неперервних значень $\omega \in (-\infty; +\infty)$.

**2. Комплексна форма інтеграла Фур'є.** За аналогією з комплексною формою ряду Фур'є $T$-періодичної функції:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n x}, \omega_n = \frac{2\pi}{T} n,$$
$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i\omega_n x} dx, n \in \mathbb{Z},$$

за умови виконання умов теореми Фур'є для функції $f$ можна записати *інтегральну формулу Фур'є в комплексній формі*:

$$\boxed{\begin{aligned} &f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \\ &F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx. \end{aligned}}$$

**3. Амплітудний та фазовий спектри інтеграла Фур'є.** Функцію $F(\omega)$ називають ще *спектральною функцією* (*спектральною щільністю*) інтеграла Фур'є.

Функцію

$$S(\omega) = \left| F(\omega) \right|$$

називають *амплітудним спектром*, а функцію

$$\varphi(\omega) = -\arg F(\omega), \arg z \in (-\pi; \pi],$$

— *фазовим спектром* функції $f(x)$.

Амплітудний та фазовий спектри неперіодичної функції, що зображуються інтегралом Фур'є, є суцільними на відміну від дискретних спектрів періодичної функції, яка розвивається в ряд Фур'є.

## 1.2. Інтегральне перетворення Фур'є

**1. Інтегральне перетворення функції.** Нехай функція $f$ задана в інтервалі $(a; b)$, скінченному або нескінченному.

**Означення 1 (інтегрального перетворення).**

*Інтегральним перетвором* функції $f(x)$ називають функцію

$$F(\omega) = \int_a^b K(x,\omega) f(x) dx.$$

Перехід від функції до її інтегрального перетвору називають *інтегральним перетворенням* (*прямим*). Перехід від інтегрального перетвору до функції називають *оберненим інтегральним перетворенням*.

Функцію $K(t,\omega)$, що є означувальною для певного перетворення, називають *ядром* перетворення.

Припускають, що інтеграл існує у властивому чи невластивому сенсі.

**2.** Розгляньмо функцію $f$ для якої виконано умови теореми Фур'є (п. 15.1.1.1).

**Означення 2 (перетворення Фур'є).**

Перехід від функції $f(x)$ до її *перетвору Фур'є*

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

називають *прямим перетворенням Фур'є* і позначають

$$\mathcal{F}\{f(x)\}(\omega) = F(\omega).$$

Перехід від інтегрального перетвору $F(\omega)$ до функції

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

називають *оберненим перетворенням Фур'є* і позначають

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}(x) = f(x).$$

Ядром інтегрального перетворення Фур'є є функція

$$\boxed{K(x,\omega) = e^{-i\omega x}.}$$

Оператор $\mathcal{F}$ називають *оператором Фур'є*.

**3.** Якщо $F(\omega)$ є перетвором Фур'є абсолютно інтегровної функції $f(x)$, то $F(\omega)$ обмежена для всіх $\omega \in \mathbb{R}$.

Нехай $f$ — неперервно диференційовна функція, така, що $f$ та $f'$ абсолютно інтегровні на всій числовій осі. Тоді $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

**4.** Знайдімо перетвір Фур'є функції $f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ $(\alpha > 0)$.

Оскільки,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(x)\right| dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \lim_{A\to 0} \frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha}\bigg|_0^A = \lim_{A\to 0}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha A}}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha},$$

то функція є абсолютно інтегровною і справджує всі вимоги теореми Фур'є. Отже для неї існує перетвір Фур'є

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x - i\omega x} dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-(\alpha + i\omega)x} dx =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \frac{e^{-(\alpha+i\omega)x}}{-(\alpha + i\omega)}\bigg|_0^A = \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{\alpha + i\omega} - \frac{e^{-(\alpha+i\omega)A}}{\alpha + i\omega}\right) = \frac{1}{\alpha + i\omega} = \frac{\alpha - i\omega}{\alpha^2 + \omega^2},$$

оскільки $\left|e^{-(\alpha+i\omega)A}\right| = e^{-\alpha A}\left|e^{-i\omega A}\right| = e^{-\alpha A} \to 0$, коли $A \to +\infty$.

## 1.3. Властивості перетворення Фур'є

**1. Лінійність.** Якщо функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ мають перетвори Фур'є $F(\omega)$ та $\Phi(\omega)$, то для будь-яких $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{F}\{\alpha f(x) + \beta\varphi(x)\}(\omega) = \alpha F(\omega) + \beta\Phi(\omega);$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{\alpha F(\omega) + \beta\Phi(\omega)\}(x) = \alpha f(x) + \beta\varphi(x).$$

**2. Подібність.** Якщо функція $f(x)$ має перетвір Фур'є $F(\omega)$, то

$$\mathcal{F}\left\{f(ax)\right\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right), a > 0.$$

**3. Перетвір Фур'є похідної.** Якщо функція $f(x)$ та її похідні $f^{(k)}(x)$ до порядку $m$ включно мають перетвори Фур'є і $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\omega)$, то

$$\mathcal{F}\{f^{(k)}(x)\} = (i\omega)^k F(\omega),\ k = 1,2,\dots,m.$$

**4. Перетвір Фур'є інтеграла.** Якщо функція $f(x)$ має перетвір Фур'є $F(\omega)$ і $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0$, то

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{x} f(t) dt\right\} = \frac{F(\omega)}{i\omega}.$$

**5. Перетвір Фур'є зміщеної функції.** Якщо функція $f(x)$ має перетвір Фур'є $F(\omega)$, то

$$\mathcal{F}\Big\{ f(x-a) \Big\} = e^{-i\omega a} F(\omega).$$

**6. Зсув аргументу перетвору Фур'є.** Якщо функція $f(x)$ має перетвір Фур'є $F(\omega)$, то

$$\mathcal{F}\Big\{ e^{-i\omega a x} f(x) \Big\} = F(\omega + a).$$

**7. Згортка двох функцій.** Згорткою двох функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$, означених для всіх $x \in \mathbb{R}$, називають нову функцію

$$f_1(x) * f_2(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-\tau) f_2(\tau) d\tau.$$

Згортка функцій має такі властивості:

1) $(\alpha f_1 + \beta f_2) * f_3 = \alpha(f_1 * f_3) + \beta(f_2 * f_3)$ (*лінійність*);

2) $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$ (*комутативність*);

3) $(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$ (*асоціативність*).

Якщо $f_1(x) \equiv 0, f_2(x) \equiv 0$, для $x < 0$, то

$$f_1(x) * f_2(x) = \int\limits_{0}^{x} f_1(x-\tau) f_2(\tau) d\tau.$$

**8. Перетвір Фур'є згортки функцій.** Якщо функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ має перетвори Фур'є $F_1(\omega)$ та $F_2(\omega)$, то

$$\mathcal{F}\Big\{ f_1(x) * f_2(x) \Big\} = F_1(\omega) F_2(\omega).$$

**9. Перетвір Фур'є добутку функцій.** Якщо функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ має перетвори Фур'є $F_1(\omega)$ та $F_2(\omega)$, то

$$\mathcal{F}\Big\{ f_1(x) f_2(x) \Big\} = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega).$$

## 1.4. Дельта-функція Дірака

**1.** Дельта-функцією Дірака $\delta(t)$ або дельта-функцією називають узагальнену функцію, яку означують умовою

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0, \end{cases} \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

За допомогою такої функції описують удари, густину маси в точці, густину джерела теплоти в точці, точковий електричний заряд тощо.

**2.** За допомогою «звичайних» функцій $\delta$-функцію можна уявити, приміром, так.

Розгляньмо функцію з параметром $\lambda$:

$$\delta(t,\lambda) = \frac{\lambda}{\pi(1+\lambda^2 t^2)}.$$

Знайдімо

$$\lim_{\lambda\to\infty} \delta(t,\lambda) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0. \end{cases}$$

Однак

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{\pi(1+\lambda^2 t^2)} dt = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \lambda t \,\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1.$$

Отже,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \delta(t,\lambda) = \delta(t).$$

Можливі й інші підходи до дельта-функції.

**3. Голкуваті функції.** Неперервну або кусково-неперервну функцію $\delta(t,\lambda)$ називають *голкуватою*, якщо:

1) $\delta(t,\lambda) = \begin{cases} 0, & |t| > \lambda, \\ \geq 0 & |t| < \lambda; \end{cases}$

2) $\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} \delta(t,\lambda) dt = 1.$

Можна показати, що наступні функції можуть бути прикладами голкуватих функцій:

1) неперервна голкувата функція (рис. 1.1).

$$\delta(t,\lambda) = \begin{cases} 0, & |t| > \lambda, \\ \dfrac{1}{\lambda}\left(1 - \dfrac{|t|}{\lambda}\right) & |t| \leq \lambda; \end{cases}$$

2) кусково-неперервна голкувата функція (рис. 1.2)

$$\delta(t,\lambda) = \begin{cases} 0, & |t| > \lambda, \\ \dfrac{1}{2\lambda} & |t| \leq \lambda; \end{cases}$$

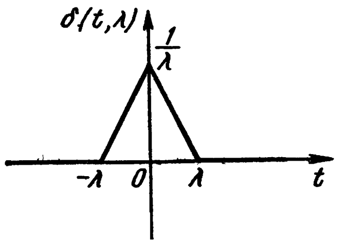

Рис. 1

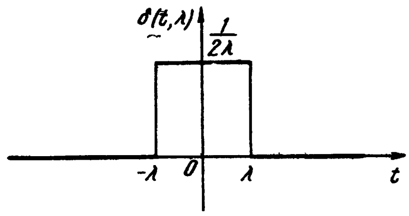

Рис. 2

З означення голкуватої функції випливає, що $\lim\limits_{\lambda\to 0}\delta(t,\lambda)=0$. З іншого боку, коли $\lambda\to 0$ середня висота піку необмежено зростає. Справді,

$$\frac{1}{2\lambda}\int\limits_{-\lambda}^{\lambda}\delta(t,\lambda)dt=\frac{1}{2\lambda}.$$

**4.** Розгляньмо інтеграл

$$\int\limits_a^b f(t)\delta(t,\lambda)dt,$$

де $f(t)$ — неперервна, а $\delta(t,\lambda)$ — голкувати функція на відрізку $[a;b]$. Нехай $a$ та $b$ мають різні знаки. Користуючись теоремою про середнє значення, для $\lambda\le\min(\left|a\right|,b)$ маємо

$$\int\limits_a^b f(t)\delta(t,\lambda)dt=\int\limits_{-\lambda}^{\lambda}f(t)\delta(t,\lambda)dt=f(\tau)\int\limits_{-\lambda}^{\lambda}\delta(t,\lambda)dt=f(\tau),$$

де $\tau\in[-\lambda;\lambda]$.

Якщо $\lambda\to 0$, то й $\tau\to 0$. Тоді, користуючись неперервністю функції $f(t)$, маємо $f(\tau)\to f(0),\tau\to 0$.

Звідки

$$\lim_{\lambda\to 0}\int\limits_a^b f(t)\delta(t,\lambda)dt=f(0).$$

Якщо ж $a$ та $b$ мають ті самі знаки, то

$$\lim_{\lambda\to 0}\int\limits_a^b f(t)\delta(t,\lambda)dt=0.$$

Отже,

$$\lim_{\lambda\to 0}\int\limits_a^b f(t)\delta(t,\lambda)dt=\int\limits_a^b f(t)\delta(t)dt=\begin{cases}f(0), & t\in(a;b)\\ 0, & t\notin(a;b).\end{cases}$$

Запроваджене позначення $\delta(t)$ і є $\delta$-функцією. Ця функція є узагальненою (і не є функцією у звичайному сенсі), вона характеризує поводження голкуватої функції, коли $\lambda \to 0$.

За проміжок $[a;b]$ можна взяти і всю числову вісь:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0).$$

Це співвідношення виражає *фільтрувальну* властивість $\delta$-функції.

Отже,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-i\omega t}dt = 1.$$

**5.** Розглядають також зміжену $\delta$-функцію:

$$\delta(t-\tau) = \begin{cases} 0, & t \neq \tau, \\ \infty, & t = \tau, \end{cases} \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)dt = 1,$$

з фільтрувальною влативістю

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-\tau)dt = f(\tau).$$

Отже,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)e^{-i\omega t}dt = e^{-i\omega\tau}.$$

**6.** Використовуючи стандартне означення похідної, можна побудувати означення похідних $\delta^{(k)}(t)$ $\delta$-функції:

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_a^b f(t)\frac{\delta(t+h)-\delta(t)}{h}dt = \int\limits_a^b f(t)\delta'(t)dt = \begin{cases} -f'(0), & 0 \in (a;b), \\ 0, & 0 \notin (a;b); \end{cases}$$

$$\int\limits_a^b f(t)\delta^{(n)}(t)dt = \begin{cases} (-1)^n f^{(n)}(0), & 0 \in (a;b), \\ 0, & 0 \notin (a;b). \end{cases}$$