ЛЕКЦІЯ 2. КОСИНУС- ТА СИНУС-ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є. ПЕРЕТВОРЕННЯ ГАРТЛІ

2.1. Косинус-перетворення Фур'є

1. Інтеграл Фур'є для парної функції. Нехай f — парна функція, яка справджує умови теореми Фур'є. Тоді в сенсі головного значення

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)dx, B(\omega) = 0,$$

оскільки $f(x)\cos(\omega x)$ — парна, а $f(x)\sin(\omega x)$ — непарна за змінною x функція.

Отже, інтеграл Фур'є набуває вигляду

$$f(x) = \int_0^{+\infty} A(\omega)\cos(\omega x)d\omega,$$

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)dx.$$

Ці формули можна переписати в симетричному вигляді:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} F_c(\omega)\cos(\omega x)d\omega, \\ F_c(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)dx, \end{aligned}}$$

де функцію $F_c(\omega)$ називають *косинус-перетвором Фур'є* функції $f(x)$.

Подана пара формул задає пряме й обернене косинус-перетворення Фур'є:

$$\mathcal{F}_c\{f(x)\}(\omega) = F_c(\omega),$$
$$\mathcal{F}_c^{-1}\{F_c(\omega)\}(x) = f(x).$$

Ядром косинус-перетворення Фур'є є функція

$$\boxed{K(x,\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(\omega x).}$$

Функції $f(x)$ та $F_c(\omega)$ є косинус-перетворами одна одної.

2. Функція, яку задано лише на півосі. Якщо функцію $f(x)$ задано лише на проміжку $(0;+\infty)$, то її можна продовжити на проміжок $(-\infty;0)$ парним чином:

$$f_\text{п}(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & x > 0, \\ f(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Тоді

$$\mathcal{F}_c\{f(x)\}(\omega) = \mathcal{F}_c\{f_\text{п}(x)\}(\omega).$$

3. Косинус-перетвори деяких функцій.

А. Знайдімо косинус-перетвір функції $f(x) = \eta(x) - \eta(x-a), a > 0$.

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{a}\cos(\omega x)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\omega x}{\omega}\bigg|_0^a = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin a\omega}{\omega}.$$

Б. Знайдімо косинус-перетвір функції $f(x) = e^{-ax}, a > 0$.

$$\mathcal{F}_c\{e^{-ax}\}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos\omega x dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\left(e^{-(a-i\omega)x} + e^{-(a+i\omega)x}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\omega^2}.$$

Також маємо, що

$$\mathcal{F}_c\left\{\frac{1}{x^2+a^2}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-a\omega}}{a}.$$

2.2. Синус-перетворення Фур'є

1. Інтеграл Фур'є для непарної функції. Нехай $f(x)$ — непарна функція, яка справджує умови теореми Фур'є. Тоді

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)dx, A(\omega) = 0,$$

оскільки $f(x)\sin(\omega x)$ — парна, а $f(x)\cos(\omega x)$ — непарна за змінною x функція.

Отже, інтеграл Фур'є набуває вигляду

$$f(x) = \int_0^{+\infty} B(\omega)\sin(\omega x)d\omega,$$

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)dx.$$

Ці формули можна переписати у симетричному вигляді:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} F_s(\omega)\sin(\omega x)d\omega,\\ F_s(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)dx,\end{aligned}}$$

де функцію $F_s(\omega)$ називають *синус-перетвором Фур'є* функції $f(x)$.

Подана пара формул задає пряме й обернене синус-перетворення Фур'є:

$$\mathcal{F}_s\{f(x)\}(\omega) = F_s(\omega),$$
$$\mathcal{F}_s^{-1}\{F_s(\omega)\}(x) = f(x).$$

Ядром синус-перетворення Фур'є є функція

$$\boxed{K(x,\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(\omega x).}$$

Функції $f(x)$ та $F_s(\omega)$ є синус-перетворами одна одної.

2. Функція, яку задано лише на півосі. Якщо функцію $f(x)$ задано лише на проміжку $(0;+\infty)$, то її можна продовжити на проміжок $(-\infty;0)$ непарним чином:

$$f_{\text{н}}(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0,\\ -f(-x), & x < 0.\end{cases}$$

Тоді

$$\mathcal{F}_s\{f(x)\}(\omega) = \mathcal{F}_s\{f_{\text{н}}(x)\}(\omega).$$

3. Синус-перетвори деяких функцій.

А. Знайдімо синус-перетвір функції $f(x) = \eta(x) - \eta(x-a), a > 0.$

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{a} \sin(\omega x) dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1-\cos \omega x}{\omega}\Bigg|_0^a = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1-\cos a\omega}{\omega}.$$

Б. Знайдімо синус-перетвір функції $f(x) = e^{-ax}, a > 0$.

$$\mathcal{F}_s\{e^{-ax}\}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin \omega x dx = \frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-(a-i\omega)x} - e^{-(a+i\omega)x}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{a-i\omega} - \frac{1}{a+i\omega}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{a^2+\omega^2}.$$

Також маємо, що

$$\mathcal{F}_s\left\{\frac{x}{x^2+a^2}\right\}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a\omega}.$$

В. Покажімо, що

$$\mathcal{F}_s^{-1}\left\{\frac{e^{-a\omega}}{\omega}\right\}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$$

Маємо

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathcal{F}_s^{-1}\left\{e^{-a\omega}\right\}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-a\omega} \sin \omega x d\omega = \frac{x}{x^2+a^2}.$$

Зінтегруємо обидві частини рівності за змінною a від u до $+\infty$:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-u\omega}}{\omega} \sin \omega x d\omega = \int_u^{+\infty} \frac{x da}{x^2+a^2} = \operatorname{arctg}\frac{a}{x}\Bigg|_u^{+\infty} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{u}{x} = \operatorname{arctg}\frac{x}{u}.$$

2.3. Властивості косинус- та синус-перетворень Фур'є

Нехай функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ мають косинус-перетвори Фур'є $F_c(\omega)$ та $\Phi_c(\omega)$ (синус-перетвори Фур'є $F_s(\omega)$ та $\Phi_s(\omega)$).

1. Лінійність. Для будь-яких $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{F}_c\{\alpha f(x) + \beta\varphi(x)\}(\omega) = \alpha F_c(\omega) + \beta\Phi_c(\omega);$$
$$\mathcal{F}_s\{\alpha f(x) + \beta\varphi(x)\}(\omega) = \alpha F_s(\omega) + \beta\Phi_s(\omega).$$

2. Подібність. Для будь-якого $a > 0$ маємо:

$$\mathcal{F}_c\left\{f(ax)\right\} = \frac{1}{a}F_c\left(\frac{\omega}{a}\right);$$

$$\mathcal{F}_s\left\{f(ax)\right\} = \frac{1}{a}F_s\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

3. Зсув аргументу x. Для будь-якого $a > 0$ маємо:

$$\mathcal{F}_c\left\{f(x+a) + f(\left|x-a\right|)\right\} = 2F_c(\omega)\cos a\omega;$$

$$\mathcal{F}_s\left\{f(\left|x-a\right|) - f(x+a)\right\} = 2F_c(\omega)\sin a\omega.$$

$$\mathcal{F}_s\left\{f(x+a) + f(\left|x-a\right|)\right\} = 2F_s(\omega)\cos a\omega;$$

$$\mathcal{F}_c\left\{f(\left|x-a\right|) + f(x+a)\right\} = 2F_s(\omega)\sin a\omega.$$

4. Зсув аргументу ω. Для будь-якого $\beta > 0$ маємо:

$$F_c(\omega+\beta) = \mathcal{F}_c\left\{f(t)\cos\beta x\right\}(\omega) - \mathcal{F}_s\left\{f(t)\sin\beta x\right\}(\omega);$$

$$F_c(\omega-\beta) = \mathcal{F}_c\left\{f(t)\cos\beta x\right\}(\omega) + \mathcal{F}_s\left\{f(t)\sin\beta x\right\}(\omega);$$

$$F_s(\omega+\beta) = \mathcal{F}_s\left\{f(t)\cos\beta x\right\}(\omega) + \mathcal{F}_c\left\{f(t)\sin\beta x\right\}(\omega);$$

$$F_s(\omega-\beta) = \mathcal{F}_s\left\{f(t)\cos\beta x\right\}(\omega) - \mathcal{F}_c\left\{f(t)\sin\beta x\right\}x(\omega).$$

Отже,

$$\mathcal{F}_c\left\{f(x)\cos\beta x\right\}(\omega) = \frac{1}{2}(F_c(\omega+\beta) + F_c(\omega-\beta));$$

$$\mathcal{F}_s\left\{f(x)\sin\beta x\right\}(\omega) = \frac{1}{2}(F_c(\omega-\beta) - F_c(\omega+\beta));$$

$$\mathcal{F}_s\left\{f(x)\cos\beta x\right\}(\omega) = \frac{1}{2}(F_s(\omega+\beta) + F_s(\omega-\beta));$$

$$\mathcal{F}_c\left\{f(x)\sin\beta x\right\}(\omega) = \frac{1}{2}(F_s(\omega+\beta) - F_s(\omega-\beta)).$$

5. Перетвір похідної. Нехай $f(x) \to 0$, коли $x \to +\infty$. Тоді

$$\mathcal{F}_c\left\{f'(x)\right\}(\omega) = \omega F_s(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0);$$

$$\mathcal{F}_s\left\{f'(x)\right\}(\omega) = -\omega F_c(\omega),$$

де $f(x) \to 0$, коли $x \to +\infty$.

$$\mathcal{F}_c\left\{f''(x)\right\}(\omega) = -\omega^2 F_c(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0);$$

$$\mathcal{F}_s\left\{f''(x)\right\}(\omega) = -\omega^2 F_s(\omega) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0).$$

де $f(x) \to 0, f'(x) \to 0,$ коли $x \to +\infty.$

6. Диференціювання перетвору.

$$F_c^{(2n)}(\omega) = (-1)^n \mathcal{F}_c\Big\{x^{2n} f(x)\Big\}(\omega);$$

$$F_c^{(2n+1)}(\omega) = (-1)^{n+1} \mathcal{F}_s\Big\{x^{2n+1} f(x)\Big\}(\omega);$$

$$F_s^{(2n)}(\omega) = (-1)^n \mathcal{F}_s\Big\{x^{2n} f(x)\Big\}(\omega);$$

$$F_s^{(2n+1)}(\omega) = (-1)^{n+1} \mathcal{F}_c\Big\{x^{2n+1} f(x)\Big\}(\omega).$$

7. Перетвір інтеграла

$$\mathcal{F}_c\left\{\int\limits_x^{+\infty} f(t)dt\right\}(\omega) = \frac{1}{\omega} F_s(\omega);$$

$$\mathcal{F}_s\left\{\int\limits_0^{x} f(t)dt\right\}(\omega) = \frac{1}{\omega} F_s(\omega).$$

8. Інтегрування перетвору:

$$\int\limits_\omega^{+\infty} F_c(\beta)d\beta = -\mathcal{F}_s\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}(\omega);$$

$$\int\limits_\omega^{+\infty} F_s(\beta)d\beta = \mathcal{F}_c\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}(\omega).$$

9. Перетвір згортки.

$$\mathcal{F}_c\left\{\int\limits_0^{+\infty} f(t)[g(x+t) + g(|x-t|)]dt\right\}(\omega) = 2F_c(\omega)G_c(\omega);$$

$$\mathcal{F}_c\left\{\int\limits_0^{+\infty} f(t)[g(x+t) + g_{\text{н}}(x-t)]dt\right\}(\omega) = 2F_s(\omega)G_s(\omega);$$

$$\mathcal{F}_s\left\{\int\limits_0^{+\infty} f(t)[g(|x-t|) - g(x+t)]dt\right\}(\omega) = 2F_s(\omega)G_c(\omega);$$

$$\mathcal{F}_s\left\{\int\limits_0^{+\infty} g(t)[f(x+t) + f_{\text{н}}(x-t)]dt\right\}(\omega) = 2F_s(\omega)G_c(\omega).$$

2.4. Перетворення Гартлі

Нехай $f(x)$ — функція, яка справджує умови теореми Фур'є.

Позначмо

$$\operatorname{cas} x = \cos x + \sin x.$$

Перетврення Гартлі (Hartley) задають співвідношення:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) \operatorname{cas}(\omega x) d\omega, \\ H(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \operatorname{cas}(\omega x) dx, \end{aligned}}$$

де функцію $H(\omega)$ називають *перетвором Гартлі* функції $f(x)$.

Подана пара формул задає пряме й обернене перетворення Гартлі.

$$\mathcal{H}\{f(x)\}(\omega) = H(\omega),$$

$$\mathcal{H}^{-1}\{H(\omega)\}(x) = f(x).$$

Ядром перетворення Гартлі є функція

$$\boxed{K(x, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{cas}(\omega x).}$$

Функції $f(x)$ та $H(\omega)$ є перетворами Гартлі одна одної.

2. Зв'язок перетворення Гартлі з перетвореннями Фур'є. Розгляньмо парну і непарну складові перетвору Гартлі:

$$H_{\text{п}}(\omega) = \frac{H(\omega) + H(-\omega)}{2},$$

$$H_{\text{н}}(\omega) = \frac{H(\omega) - H(-\omega)}{2}.$$

Тоді,

$$H_{\text{п}}(\omega) = \frac{1}{2}(H(\omega) + H(-\omega)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx;$$

$$H_{\text{н}}(\omega) = \frac{1}{2}(H(\omega) - H(-\omega)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx.$$

Отже,

$$H_п(\omega) - iH_н(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\cos(\omega x) - i\sin(\omega x))dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \mathcal{F}\{f(x)\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(\omega).$$

І навпаки,

$$H(\omega) = H_п(\omega) + H_н(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \big(\operatorname{Re} F(\omega) - \operatorname{Im} F(\omega)\big).$$

3. Знайдімо перетвір Гартлі прямокутного імпульсу $f(x) = \eta(x) - \eta(x - a), a > 0$.

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \operatorname{cas}(\omega x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{a} (\cos(\omega x) + \sin(\omega x))dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin \omega x}{\omega} - \frac{\cos \omega x}{\omega} \right)\Bigg|_0^a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin a\omega + 1 - \cos \omega a}{\omega}.$$

4. Перетвір згортки. Нехай

$$\mathcal{H}\{f_1(x)\}(\omega) = H_1(\omega), \mathcal{H}\{f_2(x)\}(\omega) = H_2(\omega).$$

Тоді,

$$\mathcal{H}\left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(x - t) dt \right\}(\omega) =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \big(H_1(\omega)(H_2(\omega) + H_2(-\omega)) + H_1(-\omega)(H_2(\omega) - H_2(-\omega)) \big).$$