ЛЕКЦІЯ 3. ЗАСТОСУВАННЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

3.1. Схема розв'язання диференціальних рівнянь

1. Нехай $P\left(\dfrac{d}{dx}\right)$ — лінійний диференціальний оператор порядку m зі сталими коефіцієнтами,

$$P\left(\frac{d}{dx}\right) \equiv a_0 \frac{d^m}{dx^m} + a_1 \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \ldots + a_{m-1} \frac{d}{dx} + a_m.$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_m$ — сталі. Використовуючи формулу для перетворення Фур'є похідних функції $y(x)$,

$$\mathcal{F}\{y^{(k)}(x)\} = (i\omega)^k Y(\omega),\ \ k = 0,1,2,\ldots,m,$$

знаходимо

$$\mathcal{F}\left\{P\left(\frac{d}{dx}\right)y\right\}(\omega) = P(i\omega)Y(\omega).$$

2. Розгляньмо диференціальне рівняння

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)y = f(x). \tag{1}$$

Нехай, шуканий розв'язок $y(x)$ має перетвір Фур'є $Y(\omega)$, а функція $f(x)$ має перетвір $F(\omega)$. Застосовуючи перетворення Фур'є до рівняння (1), дістаємо замість диференціального рівняння алгебричне рівняння щодо $Y(\omega)$,

$$P(i\omega)Y(\omega) = F(\omega).$$

Звідки,

$$Y(\omega) = \frac{F(\omega)}{P(i\omega)}$$

та

$$y(x) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{F(\omega)}{P(i\omega)}\right\}(x),$$

де $\mathcal{F}^{-1}$ — обернене перетворення Фур'є.

Основним обмеженням цього методу є те, що функції, які є розв'язками лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами не є абсолютно інтегровними. Це обмеження можна обійти, якщо розглядати узагальнені функції.

3.2. Задача Коші для рівняння теплопровідності

1. Розгляньмо однорідне рівняння теплопровідності

$$u'_t = a^2 u''_{xx},$$

без зовнішніх джерел.

Задачу Коші для цього рівняння формулюють так:

знайти функцію $u(x,t)$, яка справджує рівняння

$$u'_t = a^2 u''_{xx}, \ t > 0, \ -\infty < x < +\infty, \tag{1}$$

і початкову умову

$$u_t(x,0) = \varphi(x), \ -\infty < x < +\infty. \tag{2}$$

Фізичний зміст полягає у визначенні температури однорідного нескінченного стрижня в будь-який момент часу $t > 0$ за відомою його температурою $\varphi(x)$ у момент $t = 0$. Уважають, що бічна поверхня стрижня теплоізольована.

2. Припускаємо, що

1) $u(x,t)$ та $\varphi(x)$ достатньо гладкі функції, які спадають, коли $x^2 + t^2 \to +\infty$ так швидко, що існують перетвори Фур'є

$$U(\omega,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}dx,$$

$$\Phi(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)e^{-i\omega x}dx,$$

2) законне диференціювання:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_t'(x,t)e^{-i\omega x}dx = U_t'(\omega,t),$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}''(x,t)e^{-i\omega x}dx = -\omega^2 U(x,t).$$

3. Тоді, застосовуючи перетворення Фур'є до обох частин рівняння й початкової умови від задачі Коші для диференціального рівняння з частинними похідними переходимо до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння

$$U_t'(\omega,t) + \omega^2 a^2 U(\omega,t) = 0,$$
$$U(\omega,0) = \Phi(\omega).$$

Розв'язком цієї задачі є функція

$$U(\omega,t) = \Phi(\omega)e^{-\omega^2 a^2 t}.$$

Відомо, що

$$\mathcal{F}\{e^{-ax^2}\}(\omega) = \sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}.$$

Звідси, покладаючи $t = \dfrac{1}{4a^2\alpha}$, дістаємо

$$e^{-\omega^2 a^2 t} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}\right\}(\omega).$$

Отже, $U(\omega,t)$ є добутком перетворів функцій $\varphi(x)$ та $\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$.

Користуючись теоремою про перетвір згортки:

$$\mathcal{F}\{f_1(x) * f_2(x)\} = \mathcal{F}\{f_1(x)\}\mathcal{F}\{f_2(x)\},$$

розв'язок можна записати у вигляді:

$$U(\omega,t) = \Phi(\omega)e^{-\omega^2 a^2 t} = \mathcal{F}\left[\varphi(x) * \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}\right].$$

Отже, користуючись формулою для згортки

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)du,$$

маємо

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) e^{-\frac{(x-u)^2}{4a^2 t}} du, \ \ t > 0.$$

Одержану формулу називають *інтегралом Пуассона.*

3.3. Задача Коші для рівняння коливання струни

1. Знайдімо розв'язок $u = u(x,t)$, рівняння

$$u''_{tt} = a^2 u_{xx}, \ a = \text{const},$$

для початкових умов

$$u(x,0) = \varphi(x), u'_t(x,0) = 0, \ -\infty < x < +\infty.$$

Це — задача про вільні коливання нескінченної однорідної струни, коли задано початкове відхилення $\varphi(x)$ точок струни, а початкові швидкості відсутні.

2. Припускаємо, що функції $u(x,t)$ та $\varphi(x)$ достатньо гладкі і прямують до нуля, коли $\left|x\right| \to +\infty \ \forall t \geq 0$ достатньо швидко, що:

1) існують перетвори Фур'є:

$$U(\omega,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-i\omega x} dx,$$

$$\Phi(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i\omega x} dx,$$

2) законне диференціювання:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} e^{-i\omega x} dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(\omega,t) = \frac{d^2 U(\omega,t)}{dt^2};$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} e^{-i\omega x} dx = -\omega^2 U(\omega,t).$$

3. Застосовуючи перетворення Фур'є до обох частин рівняння і початкових умов замість диференціального рівняння з частинними похідними дістаємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння щодо функції $U(\omega,t)$, де ω — параметр:

$$U''(\omega,t) + a^2\omega^2 U(\omega,t) = 0,$$
$$U(\omega,0) = \Phi(\omega), U'_t(\omega,0) = 0.$$

Розв'язком цього диференціального рівняння є функція

$$U(\omega, t) = C_1(\omega)\cos a\omega t + C_2(\omega)\sin a\omega t.$$

З початкових умов знаходимо, що

$$C_1(\omega) = \Phi(\omega),\ \ C_2(\omega) = 0.$$

Отже, розв'язком задачі Коші є функція

$$U(\omega, t) = \Phi(\omega)\cos a\omega t.$$

Знайдімо обернене перетворення Фур'є від цього розв'язку:

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\{\Phi(\omega)\cos a\omega t\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\omega)\cos a\omega t e^{i\omega x}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\omega)\left(\frac{e^{i\omega(x+at)} + e^{i\omega(x-at)}}{2}\right)d\omega = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2}.$$

3.4. Розв'язання інтегральних рівнянь

1. Перетворення Фур'є можна застосувати до розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма 1-го роду вигляду

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\omega)e^{-i\omega x}d\omega = f(\omega)$$

Це рівняння рівносильно рівності
$\mathcal{F}\{\varphi(x)\}\{\omega\} = f(\omega)$.

Отже,

$$\varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}\{f(\omega)\}(x).$$

2. Приміром, розгляньмо рівняння

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{-i\omega x}dx = 2\pi e^{-|\omega|},$$

де $\varphi(x)$ — шукана функція. Це рівняння рівносильно рівності

$$\mathcal{F}\{\varphi(x)\}\{\omega\} = 2\pi e^{-|\omega|}$$

Тоді,

$$\varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}\{2\pi e^{-|\omega|}\}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-|\omega|}e^{i\omega x}d\omega = \int\limits_{-\infty}^{0}e^{\omega(ix+1)}d\omega + \int\limits_{0}^{+\infty}e^{\omega(ix-1)}d\omega =$$

$$= \left.\frac{e^{(ix+1)\omega}}{ix+1}\right|_{\omega=-\infty}^{\omega=0} + \left.\frac{e^{(ix-1)\omega}}{ix-1}\right|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = -\frac{1}{ix+1} + \frac{1}{ix-1} = \frac{2}{x^2+1}.$$

3.5. Застосування перетворення Фур'є для аналізу сигналів

1. Розгляньмо сигнал $f(t), t \in (-\infty; +\infty)$. У лекції 1 вже було розглянуто поняття амплітудного та частотного спектра сигналу. Запровадьмо поняття енергії та потужності сигналу.

Загальну *енергію*, зв'язану з сигналом $f(t)$ означають як

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\right|^2 dt.$$

Якщо функція $f(t)$ має перетвір Фур'є $F(\omega)$, то

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Тоді формулу для енергії сигналу можна записати як

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right] dt.$$

Змінюючи порядок інтегрування в цій формулі, дістаємо

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-(-i\omega)t} dt \right] d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) F(-\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \overline{F}(\omega) d\omega,$$

де $\overline{F}(\omega)$ є функцією спряженою до $F(\omega)$.

Так, що

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|F(\omega)\right|^2 d\omega. \tag{*}$$

Ця формула зв'язує загальну енергію сигналу $f(t)$ з інтегралом від $\left|F(\omega)\right|^2$. Тому $\left|F(\omega)\right|^2$ називають *спектральною щільністю енергії*, а графік $\left|F(\omega)\right|^2$ називають *енергетичним спектром* сигналу $f(t)$.

Рівність (*) називають *теоремою Парсеваля*.

2. У лекції 1 було знайдено перетвір функції (рис. 1)

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (\alpha > 0).$$

$$F(\omega) = \frac{\alpha - i\omega}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Отже,

$$\left|F(\omega)\right|^2 = \frac{\alpha - i\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \cdot \frac{\alpha + i\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{\alpha^2 + \omega^2}{(\alpha^2 + \omega^2)^2} = \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

На рис. 2 зображено графіки амплітудного та енергетичного спектрів сигналу

$$\left|F(\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \text{ та } \left|F(\omega)\right|^2 = \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

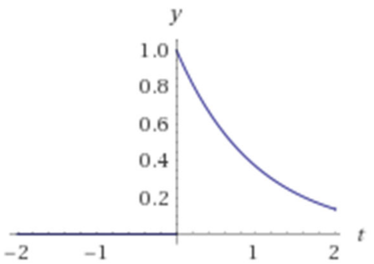

Рис. 1. Графік сигналу ($\alpha = -1$)

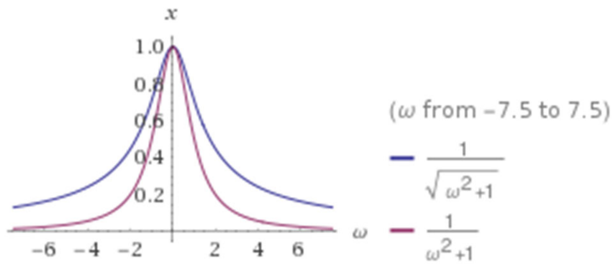

Рис. 2. Графіки спектрів

3. Існують важливі сигнали $f(t), t \in \mathbb{R}$, для яких інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\right|^2 dt$ розбігається. Для таких сигналів, замість енергії розглядають середню потужність P, яку називають *потужністю* сигналу:

$$P = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left|f(t)\right|^2 dt.$$

Зауважмо, що для сигналів, які справджують умови Діріхле інтеграл для енергії збігається, отже, такі сигнали мають нульову потужність.

4. Розгляньмо далі, узагальнені сигнали. У лекції 1 уже було одержано, що формально:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = 1;$$

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega t_0}.$$

Отже, можна вважати, що в узагальненому сенсі парами перетворень Фур'є одна одної є функції:

1) 1 та $2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$;

2) $e^{i\omega_0 t}$ та $2\pi\delta(\omega_0 - \omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ (заміна $-t_0 = \omega_0$).

Спираючись на ці результати, дістаньмо узагальнені перетвори Фур'є функцій $f(t) = \cos\omega_0 t$ та $f(t) = \sin\omega_0 t$.

Оскільки, $\cos\omega_0 t = \dfrac{1}{2}(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})$, то

$$\mathcal{F}\{\cos\omega_0 t\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t}\} + \frac{1}{2}\mathcal{F}\{e^{-i\omega_0 t}\} = \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0));$$
$$\mathcal{F}\{\sin\omega_0 t\} = \frac{1}{2i}\mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t}\} - \frac{1}{2i}\mathcal{F}\{e^{-i\omega_0 t}\} = i\pi(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)).$$

5. Невластивий інтеграл, який виражає загальну енергію сигналу $f(t) = \cos\omega_0 t$

$$E = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos^2\omega_0 t dt$$

розбігається.

Знайдімо потужність сигналу

$$P = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}\cos^2\omega_0 t dt = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\cos 2\omega_0 t\right)\Bigg|_{-T/2}^{T/2} =$$
$$= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\left(\frac{T}{2} + \frac{1}{2}\cos\omega_0 T\right) = \frac{1}{2}.$$