ЛЕКЦІЯ 4. ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

Умова абсолютної інтегровності функції на всій осі, яку накладає використання перетворення Фур'є, є вельми жорсткою. Вона виключає, приміром такі елементарні функції, як сталі, степеневі, тригонометричні та експоненту, для яких перетвір Фур'є (у розглядуваному класичному розумінні) не існує.

4.1. Оригінали та їх зображення

1. Перетвір Фур'є мають лише ті функції f, які досить швидко прямують до нуля, коли $\left|x\right| \to +\infty$.

Розгляд *інтегрального перетворення Лапласа* дозволяє послабити це обмеження.

2. Функції-оригінали.

Означення 4.1 (оригіналу).

Оригіналом називають будь-яку функцію $f(t)$, $t \in (-\infty; +\infty)$, яка справджує умови:

1) $f(t) = 0$ при $t < 0, f(0) = f(+0)$;

2) кусково-неперервна й інтегровна на будь-якому відрізку $[0; T]$;

3) існують сталі $s \geq 0$ та $M > 0$, такі що

$$\left|f(t)\right| \leq Me^{st}, t \geq 0,$$

Якщо нерівність

$$\left|f(t)\right| \leq Me^{st}, t > 0,$$

виконана для деякого $s = s_1$, то вона буде виконана й для будь-якого $s_2 > s_1$. Точну нижню межу всіх таких чисел $s, s_0 = \inf s$, для яких виконана нерівність, називають *показником росту* функції $f(t)$.

Приміром, функція

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^t, & t \geq 0 \end{cases}$$

є оригіналом з показником росту $s_0 = 1$, а

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{t^2}, & t \geq 0 \end{cases}$$

не є оригіналом.

Найпростішою функцією-оригіналом є *одиничні функція Гевісайда* (рис. 1)

$$\boxed{\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}}$$

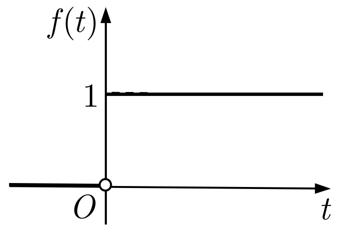

Рис. 1. Графік функції Гевісайда

Виявляється, що якщо функція $f(t)$ справджує умови 2) та 3), то помноживши цю функцію на $\eta(t)$ вже одержимо функцію-оригінал $\eta(t)f(t)$.

Надалі пишемо оригінал $\sin t$ — розуміємо $\eta(t)\sin t$ (рис. 2).

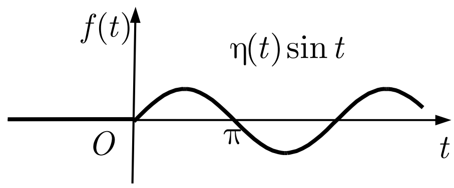

Рис. 2. Графік функції-оригіналу $\sin t$

3. Зображення за Лапласом функції.

Означення 4.2 (перетворення Лапласа).

Перехід від функції-оригіналу $f(t)$ до її *зображення за Лапласом* (*перетвору Лапласа*)

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

де $p = s + i\sigma$ — комплексна змінна, називають *прямим перетворенням Лапласа* і позначають

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(p) = F(p).$$

Перехід від зображення $F(p)$ до функції-оригіналу $f(t)$ називають *оберненим перетворенням Лапласа* і позначають

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}(t) = f(t).$$

Ядром інтегрального перетворення Лапласа є функція

$$\boxed{K(t, p) = e^{-pt}, p \in \mathbb{C}.}$$

Оператор $\mathcal{L}$ називають *оператором Лапласа*.

Той факт, що функція-оригінал $f(t)$ має своїм зображенням $F(p)$ позначають

$$f(t) \to F(p);$$
$$f(t) \risingdotseq F(p).$$

4. Окрім розглянутих інтегральних перетворень Фур'є та Лапласа використовують інтегральні перетворення Мелліна, Ганкеля та Гартлі, скінченне перетворення Фур'є, дискретні перетворення Фур'є та Лапласа тощо.

5. Теорема 4.1 (існування зображення).

Для будь-якої функції-оригіналу $f(t)$ з показником росту s_0 зображення $F(p)$ визначене в півплощині $\operatorname{Re} p = s > s_0$ і є в цій півплощині аналітичною функцією (рис. 3).

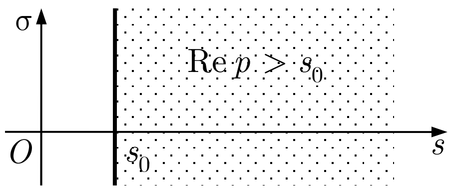

Рис. 3. Область означення зображення

Теорема 4.2 (необхідна ознака існування зображення).

Якщо точка p прямує до нескінченності так, що $\operatorname{Re} p = s$ необмежено зростає, то

$$\lim_{s\to+\infty} F(p) = 0.$$

З теореми 4.2 випливає, що функції $F(p) = 5$ чи $F(p) = p^2$ не можуть бути зображеннями.

Теорема 4.3 (єдиності функції-оригіналу).

Якщо дві неперервні функції-оригінали $f(t)$ та $\varphi(t)$ мають те саме зображення $F(p)$, то вони тотожно рівні.

6. Знайдімо зображення функцій-оригіналів $f(t) = 1$ та $f(t) = e^{at}$ (розуміючи одиничну функцію Гевісайда $\eta(t)$ та $e^{at}\eta(t)$).

Функція $\eta(t)$ є функцією-оригіналом з показником росту $s_0 = 0$.

$$1 \to \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-pt} dt = \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{1}{p} e^{-pt} \right)\Bigg|_0^A =$$
$$= \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{1}{p} e^{-Ap} + \frac{1}{p} \right) = \left| \begin{matrix} p = s + i\sigma, \\ s > 0 \end{matrix} \right| = \frac{1}{p}.$$

Отже, правдива формула:

$$\boxed{1 \to \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0.}$$

Функція $f(t) = e^{at}, a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, є функцією-оригіналом з показником росту $s_0 = \alpha$.

Розглядаючи $\operatorname{Re} p = s > \alpha$, маємо

$$e^{at} \to \int_0^{+\infty} e^{at} \cdot e^{-pt} dt = \lim_{A \to +\infty} \int_0^{A} e^{-(p-a)t} dt = \lim_{A \to +\infty} \left(-\frac{1}{p-a} e^{-(p-a)t} \right) \Bigg|_0^A =$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \left(-\frac{1}{p-a} e^{-A(p-a)} + \frac{1}{p-a} \right) = \left| \begin{matrix} p = s + i\sigma, \\ s > \alpha \end{matrix} \right| = \frac{1}{p-a}.$$

Отже, правдива формула:

$$\boxed{e^{at} \to \frac{1}{p-a}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a.}$$

7. Помноженням функції $f(t)$ на *функцію-«ножиці»* для проміжку $[a;b)$ (рис. 4)

$$\boxed{f(t) = \eta(t-a) - \eta(t-b) = \begin{cases} 0, & t \notin [a;b), \\ 1, & t \in [a;b), \end{cases}}$$

можна з функції $f(t)$ «вирізати» фрагмент, який може бути відмінний від нуля лише у проміжку $[a;b)$.

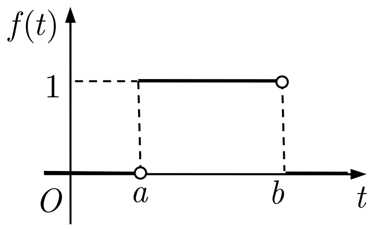

Рис. 4. Функція-«ножиці»

Це дає можливість записувати одним аналітичним виразом функції-оригінали, які задано кількома виразами. Приміром,

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t), & 0 \le t < a, \\ f_2(t), & a \le t < b, \\ f_3(t), & b \le t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{aligned} f(t) = f_1(t)(\eta(t) - \eta(t-a)) + \\ + f_2(t)(\eta(t-a) - \eta(t-b)) + \\ + f_3(t)\eta(t-b). \end{aligned}$$

8. Зображення δ-функції. За означенням перетворення Лаплас і з фільтрувальної властивості δ-функції випливає, що

$$\delta(t - t_0) \to \int_0^{+\infty} \delta(t-a) e^{-pt} dt = e^{-ap};$$

$$\delta(t) \to \int_0^{+\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = 1.$$

4.2. Зв'язок перетворень Фур'є та Лапласа

1. Нехай $f(t)$ — функція-оригінал, який справджує умову абсолютної інтегровності на проміжку $(0;+\infty)$. Тоді існує однобічне перетворення Фур'є

$$\tilde{F}(i\omega) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt. \qquad (*)$$

Застосуймо формулу (*) до функції $f(t)e^{-\sigma t}$, де σ вибрано таким чином, щоб збігався інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \left|f(t)\right| e^{-\sigma t}dt.$$

Тоді існує інтеграл

$$\tilde{F}(\sigma + i\omega) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+i\omega)t}dt. \qquad (**)$$

Розгляньмо комплексну змінну $p = \sigma + i\omega$. З рівності для $\tilde{F}(\sigma,\omega)$ маємо, що

$$\tilde{F}(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = \mathcal{L}\{f(t)\}(p),$$

де $\mathcal{L}$ — перетворення Лапласа.

Отже, перетворення Лапласа можна розглядати як результат певним чином побудованого узагальнення однобічного перетворення Фур'є. Якщо $f(t)$ є оригіналом з показником росту σ_0, то для $\sigma > \sigma_0$ інтеграл (**) існує.

4.3. Відшукання оригіналу за зображенням

1. Теорема 4.4 **(достатні умови існування зображення).**

Якщо аналітична в півплощині $\operatorname{Re} p = s > s_0$ функція $F(p)$:

1) прямує до нуля, коли $\left|p\right| \to +\infty$ у будь-якій півплощині $\operatorname{Re} p = a > s_0$ рівномірно щодо $\arg p$;

2) інтеграл $\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)dp$ збігається абсолютно,

то $F(p)$ є зображенням деякої функції-оригіналу $f(t)$.

2. Обернене перетворення Лапласа. Для ефективного використання перетворення Лапласа разом з апаратом для знаходження зображення за відомим оригіналом (пряме перетворення Лапласа), потрібно мати можливості знаходити за відомим зображенням його оригінал (виконувати обернене перетворення Лапласа).

Теорема 4.5 (обернення).

Якщо функція $f(t)$ є функцією-оригіналом з показником росту s_0 і $F(p)$ — її зображення, то в будь-якій точці неперервності функції $f(t)$ правдива *формула Рімана — Мелліна* для *оберненого перетворення Лапласа*:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)e^{pt}dp,$$

де інтеграл береться вздовж будь-якої прямої $\operatorname{Re} p = s > s_0$ і його розуміють як головне значення відповідного інтеграла.

Доведення. Для перетворення

$$\tilde{F}(i\omega) = \int\limits_{0}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt.$$

оберненим перетворенням Фур'є є

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(i\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\left(\int\limits_{0}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\right)d\omega.$$

Замінімо в цій рівності $f(t)$ на $f(t)e^{-i\sigma t}$:

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\left(\int\limits_{0}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+i\omega)t}dt\right)d\omega.$$

Оскільки $p = \sigma + i\omega, d\omega = \frac{1}{i}dp$, то коли змінна ω міняється від $-\infty$ до $+\infty$, змінна p змінюється від $\sigma - i\infty$ до $\sigma + i\infty$. Тому

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{i\omega t}F(p)e^{(p-\sigma)t}dp.$$

Скорочуючи в цій рівності на $e^{-\sigma t}$, дістаємо

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt}dt. \qquad \square$$

3. Теореми розвинення. Безпосереднє використання формули обернення зазвичай складне. Відшукання оригіналу за зображенням спрощується при деяких додаткових обмеженнях на $F(p)$.

Теорема 4.6 (1-а теорема розвинення).

Нехай зображення $F(p)$ — дробово-раціональна функція з полюсами $p_1, p_2, \dots, p_n$. Тоді оригіналом для $F(p)$ буде функція $f(t)\eta(t)$, де

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{p=p_k} (F(p)e^{pt}).$$

Якщо всі полюси $p_1, p_2, \dots, p_n$ функції $F(p) = \dfrac{A(p)}{B(p)}$ прості, то

$$\boxed{f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}.}$$

Приміром, для зображення

$$F(p) = \frac{p}{p^2-1} = \frac{p}{(p-1)(p+1)}$$

оригіналом є функція

$$f(t) = \frac{p}{2p}e^{pt}\Big|_{p=1} + \frac{p}{2p}e^{pt}\Big|_{p=-1} = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \operatorname{ch} t.$$

Теорема 15.8 (2-а теорема розвинення).

Нехай зображення $F(p)$ є аналітичною функцією в нескінченно віддаленій точці $p=\infty$, причому її розвинення в околі $|p| > R$ нескінченно віддаленої точки має вигляд

$$F(p) = \frac{c_1}{p} + \frac{c_2}{p^2} + \dots + \frac{c_n}{p^n} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}.$$

Тоді оригіналом для $F(p)$ буде функція $f(t)\eta(t)$, де

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1}.$$

Приміром, для зображення

$$F(p) = \frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{p^2\left(1+\dfrac{1}{p^2}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p^{2n+2}}$$

оригіналом є функція

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin t.$$

4. Відшукання оригіналу за допомогою властивостей і таблиць зображень. Щоб знайти оригінал дробово-раціонального зображення можна також скористатись розкладанням виразу на суму елементарних дробів, властивостями перетворення Лапласа і таблицею основних зображень.

Приміром,

$$\frac{1}{p^2(p^2+1)} = \frac{1+p^2-p^2}{p^2(p^2+1)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1} \leftarrow t - \sin t.$$