ЛЕКЦІЯ 5. ГАМА- ТА БЕТА-ФУНКЦІЇ. ФУНКЦІЯ ПОМИЛОК

Гама- та бета-функції є прикладами інтегралів, які залежать від параметрів. Ці інтеграли широко застосовують у прикладних задачах.

5.1. Гама-функція

1. Гама-функцією (Ойлеровим інтегралом 2-го роду) називають значення інтеграла

$$\boxed{\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.}$$

2. Це є невластивий інтеграл 1-го роду з параметром x. Можна довести, що цей інтеграл збігається для $x > 0$ і розбігається для $x \le 0$.

3. Можна довести, що цей інтеграл збігається правильно на будь-якому відрізку $[a;b] \subset (0;+\infty)$ (за теоремою Ваєрштраса).

З правильної збіжності випливає неперервність функції $\Gamma(x)$ для $x > 0$.

5.2. Властивості гама-функції.

Припускаємо надалі , що $x > 0$.

1. $\Gamma(x) > 0$. Отже, гама-функція не має нулів.

2. Для гама-функції правдива формула зведення:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Доведення. Зінтегруймо частинами.

$$\Gamma(x+1)=\int\limits_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt=\begin{vmatrix} u=t^x, & du=xt^{x-1}dx \\ dv=e^{-t}dt, & v=-e^{-t}\end{vmatrix}=$$

$$=-t^x e^{-t}\Big|_{t=0}^{+\infty}+x\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt=x\Gamma(x),$$

оскільки $\lim\limits_{t\to+\infty} t^x e^{-t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^x}{e^t}=0$ (за правилом Бернуллі — Лопіталя). $\square$

3. Для $x=n\in\mathbb{N}$ правдива формула

$$\Gamma(n+1)=n!$$

Доведення. Справді, для $n=1$ маємо

$$\Gamma(1)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}dt=1.$$

За формулою зведення маємо

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=...=$$
$$=n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\cdot\Gamma(1). \qquad \square$$

Застосовуючи формули зведення n разів, маємо

$$\Gamma(x+n)=(x+n-1)(x+n-2)...(x+1)x\cdot\Gamma(x).$$

4. Функція $\Gamma(x)$ диференційовна будь-яку кількість разів. Зокрема,

$$\Gamma'(x)=\left(\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt\right)'_x=\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}\ln t\cdot e^{-t}dt;$$

$$\Gamma''(x)=\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}\ln^2 t\cdot e^{-t}dt>0.$$

Звідси випливає, що похідна $\Gamma'(x)$ на півпрямій $(0;+\infty)$ може мати лише один нуль. А оскільки $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$, то за теоремою Роля цей нуль x_0 похідної $\Gamma'(x)$ лежить в інтервалі $(1;2)$. Оскільки $\Gamma''(x)>0$, то в точці x_0 функція $\Gamma(x)$ має мінімум.

Графік функції $y=\Gamma(x)$ опуклий донизу.

5. З формули $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ випливає, що

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}\to+\infty, x\to+0.$$

Отже, $x=0$ — права вертикальна асимптота.

6. Для гама-функції правдива формула доповнення:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, 0 < x < 1.$$

Отже,

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

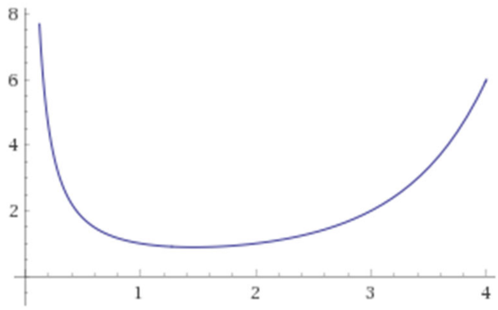

Рис. 1. Графік гама-функції

5.3. Бета-функція

1. Бета-функцією (Ойлеровим інтегралом 1-го роду) називають значення інтеграла

$$\boxed{\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.}$$

2. Це є сума невластивих інтегралів 2-го роду, які залежать від параметрів x та y. Можна довести, що ці інтеграли збігаються, коли $x > 0, y > 0$. Цей інтеграл правильно збігається в будь-якій області $x \geq a > 0, y \geq b > 0$, отже бета-функція неперервна для $x > 0, y > 0$.

5.4. Властивості бета-функції.

Надалі припускаємо, що $x > 0, y > 0$

1. Бета-функція є симетричною щодо змінних x та y, тобто

$$\mathrm{B}(x,y) = B(y,x).$$

Доведення. Справді, після заміни змінної $t = 1-\tau$ в інтегралі, маємо

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \left| t = 1-\tau, dt = -d\tau \right| = -\int_1^0 (1-\tau)^{x-1}\tau^{y-1}d\tau =$$

$$= \int_0^1 \tau^{y-1}(1-t)^{x-1}dt = \mathrm{B}(y,x). \qquad \square$$

2. Для бета-функції правдиві формули зведення:

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{y-1}{x+y-1}\mathrm{B}(x,y-1),$$

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{x-1}{x+y-1}\mathrm{B}(x-1,y).$$

3. Якщо $x = n \in \mathbb{N}, y = m \in \mathbb{N}$, то

$$\mathrm{B}(m,n)=\mathrm{B}(n,m)=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

4. Після підстановки $t=\dfrac{\tau}{1+\tau}$, дістаємо ще одне означення бета-функції через невластивий інтеграл 1-го роду, який залежить від параметрів:

$$\mathrm{B}(x,y)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\tau^{x-1}}{(1+\tau)^{x+y}}\,d\tau.$$

5. Формули зв'язку між гама- та бета-функціями. Правдива формула, що виражає бета-функцію через гама-функції:

$$\boxed{\mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.}$$

Замінімо, в інтегралі

$$\Gamma(x)=\int\limits_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$$

змінну за формулою $t=sz$, де $s>0$. Тоді

$$\Gamma(x)=s^x\int\limits_0^{+\infty}z^{x-1}e^{-sz}dz.$$

Замінюючи тут x на $x+y$ та s на s на $1+s$, дістаємо

$$\frac{\Gamma(x+y)}{(1+s)^{x+y}}=\int\limits_0^{+\infty}z^{x+y-1}e^{-(1+s)z}dz.$$

Множачи цю рівність на s^{x-1} й інтегруючи за s від 0 ∞, маємо

$$\Gamma(x+y)\int\limits_0^{+\infty}\frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}}ds=\int\limits_0^{+\infty}s^{x-1}ds\int\limits_0^{+\infty}z^{x+y-1}e^{-(1+s)z}dz.$$

Змінюючи порядок інтегрування у правій частині одержаної рівності, і враховуючи формулу з п. 4., знаходимо

$$\Gamma(x+y)\mathrm{B}(x,y)=\int\limits_0^{+\infty}z^{y-1}e^{-z}dz\int\limits_0^{+\infty}(sz)^{x-1}e^{-(sz)}d(sz)=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}z^{y-1}e^{-z}dz\int\limits_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt=\Gamma(y)\Gamma(x).$$

5.5. Застосування гама- та бета-функцій

1. Знайдімо зображення за Лапласом від функції оригіналу $f(t) = t^\alpha, \alpha > -1$.

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\}(p) = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-pt} dt = \left| \begin{aligned} pt &= \tau, t = \frac{\tau}{p} \\ dt &= \frac{d\tau}{p} \end{aligned} \right| = \int_0^{+\infty} \frac{\tau^\alpha}{p^\alpha} e^{-\tau} \frac{1}{p} d\tau =$$

$$= \frac{1}{p^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} \tau^{\alpha+1} e^{-\tau} d\tau = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}, \alpha > -1.$$

Зокрема,

$$\mathcal{L}\{t^n\}(p) = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}} = \frac{n!}{p^{n+1}}, n \in \mathbb{N}.$$

2. Обчислімо інтеграл

$$\int_0^1 \ln^p \left(\frac{1}{x}\right) dx = \left| \frac{1}{x} = e^t, x = e^{-t} \right| = \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt = \Gamma(p+1).$$

3. Виразімо інтеграл від степенів тригонометричних функцій:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \cos^m x dx, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N},$$

через бета-функцію.

Виконуємо підстановку $\sin^2 x = u$, для якої

$$\sin^n x = (\sin^2 x)^{n/2} = u^{n/2};$$

$$\cos^m x = (\cos^2 x)^{m/2} = (1 - \sin^2 x)^{m/2} = (1 - u^2)^{m/2};$$

$$du = 2 \sin x \cos x dx = 2(\sin^2 x)^{1/2} (\cos^2 x)^{1/2} dx = 2u^{1/2} (1-u)^{1/2} dx;$$

$$dx = \frac{1}{2u^{1/2}(1-u)^{1/2}} du.$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \cos^m x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 u^{\frac{n-1}{2}} (1-u)^{\frac{m-1}{2}} du = \frac{1}{2} \int_0^1 u^{\frac{n+1}{2}-1} (1-u)^{\frac{m+1}{2}-1} du =$$

$$= \mathrm{B}\left(\frac{n+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}.$$

Оскільки $\dfrac{n+1}{2}, \dfrac{m+1}{2}$ та $\dfrac{n+m}{2}+1$ — або цілі числа, або половини цілих чисел, то послідовне застосування формули зведення приведе до обчислення або $\Gamma(1)=1$, або до $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

5.6. Функція помилок

1. Розгляньмо ще дві спеціальні функції, які означують через інтеграл.

Функцію помилок задають формулою

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt.$$

Доповняльну функцію помилок задають формулою

$$\operatorname{erfc}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt.$$

Очевидно, що $\operatorname{erf}(0)=0$.

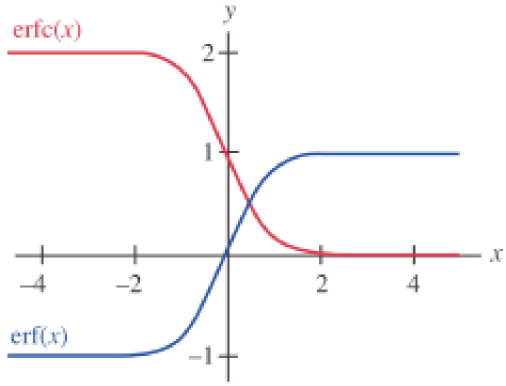

Рис. 2. Графіки функції помилок і доповняльної функції помилок

Області означення обох функції $(-\infty;+\infty)$.

2. З рівності

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

випливає, що

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x} e^{-t^2}dt+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt=\operatorname{erf}(x)+\operatorname{erfc}(x)=1.$$

Отже, $\operatorname{erfc}(0)=1$.

3. Функція помилок непарна

$$\operatorname{erf}(x)=-\operatorname{erf}(-x).$$

4. Функція помилок не може бути представлена через елементарні функції, але, розкладаючи підінтегральну функцію в ряд Тейлора й інтегруючи почленно, можна одержати її розвинення у степеневий ряд:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}.$$

5. Функції $\operatorname{erf}(x)$ та $\operatorname{erfc}(x)$ є неперервними функціями. Похідні від них виражаються формулами:

$$\operatorname{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}; \quad \operatorname{erfc}'(x) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

6. Функції мають такі границ:

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{erf}(x) = -1, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{erfc}(x) = 2;$$
$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{erf}(x) = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{erfc}(x) = 0;$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{erf}(x)}{x} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

7. Через функцію помилок можна виразити деякі інтеграли:

$$\int_a^b e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(\operatorname{erf}(b) - \operatorname{erf}(a));$$
$$\int_{-a}^{a} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(a).$$

8. Можна знайти перетвір Лапласа від функції помилок:

$$\mathcal{L}\left\{\operatorname{erf}(\sqrt{t})\right\}(p) = \frac{1}{p\sqrt{p+1}}.$$