ЛЕКЦІЯ 6. ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

Розгляньмо властивості перетворення Лапласа, які власне і формують правила операційного числення — потужного методу розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь.

6.1. Лінійність та подібність

1. Лінійність. Якщо $f(t)$ та $\varphi(t)$ — функції-оригінали відповідно з порядками росту s_1 та s_2, то для будь-яких комплексних сталих α та β

$$\boxed{\alpha f(t) + \beta\varphi(t) \to \alpha F(p) + \beta\Phi(p),}$$

де $\operatorname{Re} p > \max\{s_1, s_2\}$.

Знайдімо зображення функцій, які лінійно виражаються через експоненту:

$$\sin\omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \to \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2};$$

$$\cos\omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega}\right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2};$$

$$\operatorname{sh}\omega t = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - \omega} - \frac{1}{p + \omega}\right) = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2};$$

$$\operatorname{ch}\omega t = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - \omega} + \frac{1}{p + \omega}\right) = \frac{p}{p^2 - \omega^2}.$$

2. Подібність. Якщо $f(t)$ — функція-оригінал, то для будь-якого сталого $\alpha > 0$

$$\boxed{f(\alpha t) \to \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).}$$

► Нехай $f(t) \to F(p)$. Тоді

$$f(\alpha t) \to \int\limits_0^{+\infty} f(\alpha t)e^{-pt}dt = \left|\alpha t = \tau\right| = \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{+\infty} f(\tau)e^{-\frac{p}{\alpha}\tau}d\tau = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \blacktriangleleft$$

6.2. Диференціювання оригінал та зображення

1. Диференціювання оригіналу. Якщо $f(t)$ є функцією-оригіналом з порядком росту s_0 і функції $f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ — також функції-оригінали з порядками росту відповідно $s_1, s_2, \ldots, s_n$, то

$$\begin{aligned} f'(t) &\to pF(p) - f(0), \\ f''(t) &\to p^2F(p) - (pf(0) + f'(0)), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(n)}(t) &\to p^nF(p) - (p^{n-1}f(0) + p^{n-2}f'(0) + \ldots + f^{(n-1)}(0)), \end{aligned}$$

де $f^{(k)}(0) = \lim\limits_{t\to+0} f^{(k)}(t), k = \overline{1, n-1}$.

► Доведімо властивість для $n = 1$. Нехай $f(t) \to F(p)$. Тоді для $\operatorname{Re} p = s > \overline{s} = \max\{s_0, s_1\}$ маємо

$$f'(t) \to \int\limits_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = \left(f(t)e^{-pt}\right)\Big|_{t=0}^{t=+\infty} + p\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

Якщо $\operatorname{Re} p = s > \overline{s}$, то

$$\left|f(t)e^{-pt}\right| \le Me^{-(s-\overline{s})t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

і

$$f'(t) \to -f(0) + pF(p). \blacktriangleleft$$

Із властивості диференціювання оригіналу випливає *формула включення*:

$$\lim_{\operatorname{Re} p\to+\infty} pF(p) = f(0).$$

► Справді,

$$f'(t) = g(t) \to pF(p) - f(0) = G(p) \to 0, \operatorname{Re} p \to +\infty \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{\operatorname{Re} p\to+\infty} pF(p) = f(0). \blacktriangleleft$$

2. Диференціювання зображення. Диференціювання зображення зводиться до помноження на $(-t)$ оригіналу,

$$F^{(n)}(p) \leftarrow (-t)^n f(t).$$

► Оскільки функція $F(p)$ у півплощині $\operatorname{Re} p = s > s_0$ є аналітичною, то її можна диференціювати за змінною p. Маємо

$$F'(p) = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-pt}dt,$$

$$F''(p) = \int_0^{+\infty} t^2 f(t)e^{-pt}dt,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F^{(n)}(p) = \int_0^{+\infty} (-1)^n t^n f(t)e^{-pt}dt. \blacktriangleleft$$

Приміром,

$$\boxed{\begin{aligned} &t\sin\omega t \to -\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)' = \frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2};\\ &t\cos\omega t \to -\left(\frac{p}{p^2+\omega^2}\right)' = -\frac{p^2+\omega^2-2p^2}{(p^2+\omega^2)^2} = \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}.\end{aligned}}$$

$$(-t)^n \cdot 1 \to \left(\frac{1}{p}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{p^{n+1}} \Leftrightarrow \boxed{t^n \to \frac{n!}{p^{n+1}}.}$$

6.3. Інтегрування оригіналу та зображення

1. Інтегрування оригіналу. Інтегрування оригіналу зводиться до ділення зображення на p: якщо $f(t) \to F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \to \frac{F(p)}{p}.$$

► Покладімо

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau.$$

Можна показати, що якщо $f(t)$ є функцією-оригіналом, то й $\varphi(t)$ буде функцією-оригіналом, причому $\varphi(0) = 0$. Нехай $\varphi(t) \to \Phi(p)$. Тоді

$$f(t) = \varphi'(t) \to p\Phi(p) - \varphi(0) = p\Phi(p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(p) = p\Phi(p) \Rightarrow \Phi(p) = \frac{F(p)}{p}. \blacktriangleleft$$

2. Інтегрування зображення. Якщо $f(t) \to F(p)$ й інтеграл $\int_p^{\infty} F(q)dq$ збігається, то він є зображенням функції $\dfrac{f(t)}{t}$:

$$\frac{f(t)}{t} \to \int\limits_p^{+\infty} F(q)dq.$$

$$\blacktriangleright \int\limits_p^{\infty} F(q)dq = \int\limits_p^{\infty} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-qt}dt \right\} dq =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} f(t) \left\{ \int\limits_p^{\infty} e^{-qt}dq \right\} dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-pt}dt. \blacktriangleleft$$

Приміром,

$$f(t) = \frac{\sin t}{t} \to \int\limits_p^{\infty} \frac{dq}{q^2+1} = \lim_{A\to\infty} \operatorname{arctg} q\Big|_p^A =$$

$$= \lim_{A\to\infty} (\operatorname{arctg} A - \operatorname{arctg} p) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p.$$

6.4. Зміщення оригіналу та зображення

1. Запізнення (зміщення) оригіналу. Нехай $f(t)$ — оригінал. Тоді $f(t-a), a > 0$ — також є оригіналом з аргументом, який запізнюється на величину a. Графік $f(t-a)$ дістають з графіка $f(t)$ зсувом праворуч на величину a (рис. 15.5).

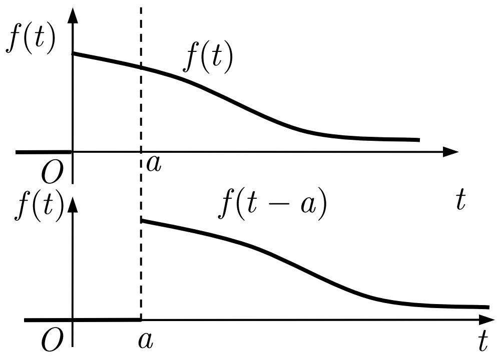

Рис. 1. Запізнення оригіналу

Якщо $f(t) \to F(p)$, то для будь-якого додатного a («запізнення»)

$$f(t-a) \to e^{-pa}F(p).$$

► Оскільки $f(t-a) \equiv 0, t < a$, то

$$f(t-a) \to \int\limits_0^{+\infty} f(t-a)e^{-pt}dt = \int\limits_a^{+\infty} f(t-a)e^{-pt}dt = \left| x = t - a \right| =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} f(x)e^{-p(x+a)}dx = e^{-pa} \int\limits_0^{+\infty} f(x)e^{-px}dx = e^{-pa}F(p). \blacktriangleleft$$

Приміром, знайдімо зображення функція-«ножиці»:

$$f(t) = \eta(t-a) - \eta(t-b) \to \frac{e^{-pa}}{p} - \frac{e^{-pb}}{p}.$$

Так само доводять і властивість «випередження» оригіналу:

$$f(t+a) \to e^{pa}\left(F(p) - \int_0^a f(t)e^{-pt}dt\right), a > 0.$$

2. Зміщення (зображення). Якщо $f(t) \to F(p)$, то для будь-якого комплексного числа α

$$e^{\alpha t} f(t) \to F(p-\alpha).$$

► $e^{\alpha t} f(t) \to \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} f(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(p-\alpha)t}dt = F(p-\alpha)$. ◄

Приміром,

$$\boxed{\begin{aligned} e^{\alpha t}\sin\omega t &\to \frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}, \\ e^{\alpha t}\cos\omega t &\to \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}. \end{aligned}}$$

6.5. Зображення періодичного оригіналу

Нехай функція $f(t)$ періодична з періодом T є функцією-оригіналом з показником росту s. Тоді,

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T f(t)e^{-pt}dt, \quad \operatorname{Re} p = s > 0.$$

$$\blacktriangleright f(t) \to F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = \int_0^T f(t)e^{-pt}dt + \int_T^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt =$$

$$= \int_0^T f(t)e^{-pt}dt + \int_0^{+\infty} f(t+T)e^{-p(t+T)}dt =$$

$$= \int_0^T f(t)e^{-pt}dt + e^{-pT}F(p) \Rightarrow F(p) = \frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T f(t)e^{-pt}dt. \blacktriangleleft$$

6.6. Зображення згортки

1. Згортка функцій. Нехай функції $f(t)$ та $\varphi(t)$ означені й неперервні для всіх t. *Згорткою* $(f*\varphi)(t)$ цих функцій називають нову функцію від t, яку означують рівністю

$$(f*\varphi)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau,$$

якщо цей інтеграл існує.

Для функцій-оригіналів $f(t)$ та $\varphi(t)$ згортання завжди виконуване, причому

$$\boxed{(f*\varphi)(t)=\int\limits_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau.}$$

Згортання функцій комутативне, тобто

$$\int\limits_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau=\int\limits_0^t f(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau.$$

2. Теорема множення. Якщо $f(t)\to F(p),\varphi(t)\to\Phi(p),$ то згортка $(f*\varphi)(t)$ має зображення $F(p)\Phi(p)$:

$$(f*\varphi)(t)=\int\limits_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau\to F(p)\Phi(p).$$

$$\blacktriangleright\int\limits_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau\to\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}\left\{\int\limits_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau\right\}dt=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}\left\{\int\limits_0^{+\infty}f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau\right\}dt\overset{\text{(рис. 15.6)}}{=}$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}f(\tau)\left\{\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}\varphi(t-\tau)dt\right\}d\tau=\int\limits_0^{+\infty}f(\tau)\Phi(p)e^{-p\tau}d\tau=\Phi(p)F(p).\blacktriangleleft$$

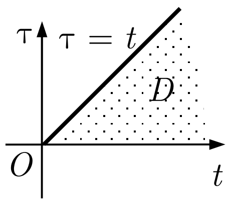

Рис. 2

Приміром,

$$\int\limits_0^t\tau\sin(t-\tau)d\tau=t*\sin t\to\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{p^2+1}=\frac{1}{p^4+p^2}.$$

3. Інтеграл Дюамеля. Нехай $f(t)$ та $\varphi(t)$ — функції-оригінали, причому функція $f(t)$ неперервна на $[0;+\infty)$, а $\varphi(t)$ — неперервно диференційовна на $[0;+\infty)$. Тоді якщо $f(t)\to F(p),\varphi(t)\to\Phi(p),$ то

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau\to pF(p)\Phi(p).$$

$$\blacktriangleright\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau\right)=f(t)\varphi(0)+\int\limits_0^t f(\tau)\varphi'(t-\tau)d\tau\to pF(p)\Phi(p).\blacktriangleleft$$

6.7. Основна таблиця зображень

Зведімо до таблиці одержані зображення елементарних функцій.

1. $1 \to \dfrac{1}{p}$.	**2.** $e^{at} \to \dfrac{1}{p-a}$.
3. $t \to \dfrac{1}{p^2}$.	**4.** $t^n \to \dfrac{n\,!}{p^{n+1}}$; $\quad t^{\alpha} \to \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$.
5. $\sin\omega t \to \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$,	**6.** $\cos\omega t \to \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$,
7. $\operatorname{sh}\omega t \to \dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$.	**8.** $\operatorname{ch}\omega t \to \dfrac{p}{p^2-\omega^2}$.
9. $e^{\alpha t}\sin\omega t \to \dfrac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$.	**10.** $e^{\alpha t}\cos\omega t \to \dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$.
11. $t\sin\omega t \to \dfrac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$.	**12.** $t\cos\omega t \to \dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$.