ЛЕКЦІЯ 7. ЗАСТОСУВАННЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

7.1. Розв'язання лінійних диференціальних рівнянь
7.2. Розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь
7.3. Розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерри
7.4. Розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними

Операційне числення є одним з ефективних методів математичного аналізу, що дозволяє зводити дослідження диференціальних і деяких типів інтегральних операторів і рівнянь, які містять ці оператори, до розгляду простіших алгебричних задач.

7.1. Розв'язання лінійних диференціальних рівнянь

В операційному численні, скажімо за допомогою інтегрального перетворення, реалізують таку схему розв'язання задачі (рис. 1):

1) за допомогою прямого перетворення від шуканих функцій-оригіналів переходять до їх зображень;

2) над зображеннями проводять дії, які відповідають заданим діям над шуканими функціями;

3) одержавши деякий результат після дій над зображеннями, за допомогою оберненого перетворення переходять від зображення до його оригіналу.

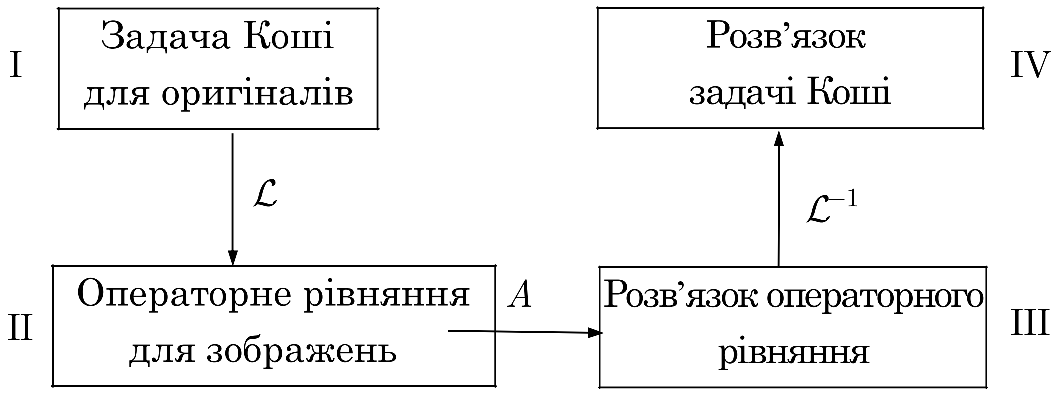

Рис. 1. Загальна схема розв'язання задачі Коші для ДР

1. Розв'язання задачі Коші для лінійних ДР зі сталими коефіцієнтами зі знаходженням зображення правої частини рівняння. Розгляньмо задачу Коші для диференціального рівняння 2-го порядку:

$$a_0x'' + a_1x' + a_2x = f(t), x(0) = x_0, x'(0) = x_0',$$

де a_0, a_1, a_2 — сталі, $a_0 \neq 0$.

Нехай

$$x(t) \to X(p), f(t) \to F(p)$$

(припускаючи, що $x(t)$ та $f(t)$ — функції-оригінали). Застосовуючи перетворення Лапласа до обох частин ДР і враховуючи початкові умови, дістаємо операторне рівняння

$$(a_0p^2 + a_1p + a_2)X(p) - (a_0px_0 + a_0x_0' + a_1x_0) = F(p).$$

З операторного рівняння дістаємо операторний розв'язок

$$X(p) = \frac{F(p) + a_0px_0 + a_0x_0' + a_1x_0}{a_0p^2 + a_1p + a_2}.$$

За знайденим зображенням $X(p)$ знаходимо оригінал $x(t)$, який є розв'язком задачі Коші.

Приміром, розв'яжімо операційним методом задачу Коші:

$$x'' + x = 1, x(0) = 0, x'(0) = 1.$$

$$x(t) \to X(p);$$

$$x''(t) \to p^2X(p) - (px(0) + x'(0)) = p^2X(p) - 1;$$

$$1 \to \frac{1}{p}.$$

$$p^2X(p) - 1 + X(p) = \frac{1}{p};$$

одержали операторне рівняння

$$(p^2 + 1)X(p) = \frac{1}{p} + 1.$$

$$X(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)} + \frac{1}{p^2 + 1} \leftarrow \int_0^t \sin\tau d\tau + \sin t = 1 - \cos t + \sin t = x(t).$$

2. Розв'язання задачі Коші без знаходження зображення правої частини рівняння. Розгляньмо задачу Коші для диференціального рівняння 2-го порядку з нульовими початковими умовами:

$$a_0x_1'' + a_1x_1' + a_2x_1 = f(t),$$

$$x(0) = x'(0) = 0,$$

де a_0, a_1, a_2 — сталі, $a_0 \neq 0$.

А. Перший метод. Нехай

$$x(t) \to X(p), f(t) \to F(p)$$

(припускаючи, що $x(t)$ та $f(t)$ — функції-оригінали), і явний вигляд $F(p)$ не знаходимо.

Маємо операторне рівняння:

$$X(p)(a_0p^2 + a_1p + a_2) = F(p).$$

Тоді,

$$X(p) = \frac{1}{a_0p^2 + a_1p + a_2}F(p) = K(p)F(p),$$

де $K(p) = \dfrac{1}{a_0p^2 + a_1p + a_2}$.

Розв'язок $x(t)$ шукаємо як згортку:

$$x(t) = k(t) * f(t) = \int_0^t k(\tau)f(t-\tau)d\tau = \int_0^t k(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

де $K(p) \leftarrow k(t)$.

Приміром, розв'яжімо задачу Коші:

$$x' - x = \frac{e^t}{t+1}, x(0) = 0.$$

$$x(t) \to X(p);$$

$$x'(t) \to pX(p) - x(0) = pX(p);$$

$$f(t) = \frac{e^t}{t+1} \to F(p).$$

$$pX(p) - X(p) = F(p).$$

одержали операторне рівняння

$$X(p) = \frac{F(p)}{p-1} = \frac{1}{p-1}F(p) \leftarrow$$

$$\leftarrow e^t * f(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)}\frac{e^\tau}{\tau+1}d\tau = e^t\int_0^t \frac{d\tau}{\tau+1} = e^t \ln\left|t+1\right| = x(t).$$

Б. Другий метод. Якщо відомий розв'язок $x_1(t)$ задачі Коші:

$$a_0x'' + a_1x' + a_2x = 1, x_1(0) = x_1'(0) = 0,$$

то розв'язок $x(t)$ задачі Коші

$$a_0x'' + a_1x' + a_2x = f(t), x(0) = x'(0) = 0,$$

можна знайти за Дюамелевою формулою:

$$x(t) = \int\limits_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau = \int\limits_0^t f'(t-\tau)x_1(\tau)d\tau.$$

7.2. Розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь

Розгляньмо задачу Коші для системи лінійних неоднорідних ДР 1-го порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + f_1(t), \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + f_2(t), \end{cases} x(0) = x_0, y(0) = y_0.$$

Припустімо, що $x(t), y(t)$ та $f_1(t), f_2(t)$ є функціями-оригіналами і позначимо:

$$x(t) \to X(p), y(t) \to Y(p),$$
$$f_1(t) \to F_1(p), f_2(t) \to F_2(p).$$

Заданій системі з початковими умовами відповідає система операторних рівнянь:

$$\begin{cases} (p - a_{11})X(p) - a_{12}Y(p) = F_1(p) + x_0, \\ -a_{21}X(p) + (p - a_{22})Y(p) = F_2(p) + y_0. \end{cases}$$

Розв'язуючи її, приміром, методом Крамера, знаходимо зображення $X(p)$ та $Y(p)$, за якими відновлюємо оригінали $x(t)$ та $y(t)$ розв'язків задачі Коші.

7.3. Розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерри

Нехай маємо інтегральне рівняння Вольтерри 2-го роду типу згортки

$$\varphi(t) = f(t) + \int\limits_0^t k(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau.$$

Нехай

$$\varphi(t) \to \Phi(p), f(t) \to F(p), k(t) \to K(p).$$

Застосовуючи до обох частин інтегрального рівняння перетворення Лапласа і користуючись теоремою множення, маємо

$$\Phi(p) = F(p) + K(p)\Phi(p),$$

звідки

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - K(p)}, K(p) \neq 1.$$

Для зображення $\Phi(p)$ знаходимо оригінал $\varphi(t)$ — розв'язок інтегрального рівняння.

Приміром, розв'яжімо інтегральне рівняння

$$\int_0^t \cos(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau = \sin t.$$

$$\varphi(t) \to \Phi(p).$$

$$\underbrace{\Phi(p)\frac{p}{p^2+1} = \frac{1}{p^2+1}}_{\text{одержали операторне рівняння}}.$$

$$\Phi(p) = \frac{1}{p} \leftarrow 1 = \varphi(t).$$

7.4. Розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними

Розгляньмо наступну задачу: знайти розв'язок $u = u(x,t)$ рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$

який справджує початкову умову

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

та крайові умови:

$$u(0,t) = \psi_1(t);\ \ u(l,t) = \psi_2(t).$$

Нехай $u(x,t), u''_{xx}(x,t), f(x,t), \psi_1(t)$ та $\psi_2(t)$ — оригінали та

$$u(x,t) \to U(x,p) = \int_0^{+\infty} u(x,t)e^{-pt}dt;$$

$$f(x,t) \to F(x,p);\ \ \psi_1(t) \to \Psi_1(p);\ \ \psi_2(t) \to \Psi_2(p).$$

Тоді

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \to \int_0^{+\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}e^{-pt}dt = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{+\infty} u(x,t)e^{-pt}dt = \frac{\partial U(x,p)}{\partial x};$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \to \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}e^{-pt}dt = \frac{\partial U(x,p)}{\partial x^2}.$$

Далі, ураховуючи початкову умову, маємо

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \to pU(x,p) - u(x,0) = pU(x,p) - \varphi(x).$$

Для зображення $U(x,p)$ із крайових умов дістаємо:

$$U(0,p) = \Psi_1(p);\;\; U(l,p) = \Psi_2(p).$$

Переходячи в диференціальному рівнянні з частинними похідними від оригіналів до зображень, дістаємо звичайне диференціальне рівняння:

$$a^2\frac{d^2U}{dx^2} - pU + \varphi(x) + F(x,p) = 0.$$

Розв'язуючи це диференціальне рівняння, знаходимо зображення $U(x,p)$. Тоді, за допомого оберненеого перетворення Лапласа, можемо знайти оригінал $u(x,t)$ розв'язку крайової задачі.

2. Розв'язання хвильового рівняння. Розв'язати хвильове рівняння $(u = u(x,t))$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,\;\; 0 \le x \le l;\;\; t > 0,$$

для початкових умов

$$u(x,0) = A\sin\frac{\pi x}{l};\;\; \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$$

і крайових умов

$$u(0,t) = u(l,t) = 0.$$

Розв'язання. Нехай $U(x,p)$ — зображення шуканого розв'язку $u(x,t)$. Тоді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \to \int_0^{+\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}e^{-pt}dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^{+\infty}u(x,t)e^{-pt}dt = \frac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2}.$$

За правилом диференціювання оригіналу маємо:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \to p^2U(x,p) - pA\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Переходячи в диференціальному рівняння до зображень, дістаємо

$$\frac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2} - \frac{p^2}{a^2}U = -\frac{pA}{a^2}\sin\frac{\pi x}{l},$$

а з крайових умов

$$U(0,p) = U(l,p) = 0.$$

Розв'язуючи рівняння, одержуємо

$$U(x,p) = C_1 e^{px/a} + C_2 e^{-px/a} + \frac{Ap}{p^2 + a^2\pi^2/l^2} \sin\frac{\pi x}{l}.$$

Отже, ураховуючи крайові умови, маємо

$$U(x,p) = \frac{Ap}{p^2 + a^2\pi^2/l^2} \sin\frac{\pi x}{l}.$$

Оригіналом для цього зображення є шуканий розв'язок крайової задачі

$$u(x,t) = A\cos\frac{\pi a}{l} t \sin\frac{\pi x}{l}.$$