ЛЕКЦІЯ 8. ПЕРЕТВОРЕННЯ МЕЛЛІНА ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

8.1. Означення

1. Зв'язок з перетворенням Фур'є. Дістаньмо перетворення Мелліна з формул прямого та оберненого перетворення Фур'є:

$$\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) = G(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt;$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\}(t) = g(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

Замінюючи змінні $x = e^{\omega}, it = c - s$, де c — стала, дістаємо

$$G(is - ic) = \int\limits_{0}^{\infty} x^{s-c-1}g(\log x)dx,$$

$$g(\log x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{c-s}G(is - ic)ds.$$

Покладаючи $x^{-c}g(\log x) \equiv f(x)$ та $G(ip - ic) = F(p)$, означуємо *пряме* та *обернене перетворення Мелліна* формулами:

$$\mathcal{M}\{f(x)\}(s) = F(s) = \int\limits_{0}^{+\infty} x^{s-1}f(x)dx;$$

$$\mathcal{M}^{-1}\{F(s)\}(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s}F(s)ds.$$

де $f(x)$ є дійсною функцією, означеною на $(0;+\infty)$, s — комплексною змінною.

2. Перетвори Мелліна деяких функції.

A. $f(x) = e^{-ax}, a > 0.$

$$\mathcal{M}\{e^{-ax}\}(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-ax}dx = \left| \begin{matrix} ax = t, \\ dx = \dfrac{1}{a}\,dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{a^s}\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt = \frac{\Gamma(s)}{a^s}.$$

Б. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

$$\mathcal{M}\left\{\frac{1}{1+x}\right\}(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}\,\frac{1}{1+x}\,dx = \left| \begin{matrix} x = \dfrac{t}{1-t}, \\ t = \dfrac{x}{1+x} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_0^1 t^{s-1}(1-t)^{(1-s)-1}dt = \mathrm{B}(s,1-s) = \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s},$$

$$0 < \operatorname{Re} s < 1.$$

8.2. Властивості перетворення Мелліна

1 (подібність). Якщо $\mathcal{M}\{f(x)\}(s) = F(s)$, то

$$\mathcal{M}\{f(ax)\}(s) = \frac{F(s)}{a^s}, a > 0.$$

2 (зсув аргументу зображення). Якщо $\mathcal{M}\{f(x)\}(s) = F(s)$, то

$$\mathcal{M}\{x^a f(x)\}(s) = F(s+a).$$

3. Якщо $\mathcal{M}\{f(x)\}(s) = F(s)$, то

$$\mathcal{M}\{f(x^a)\}(s) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right);$$

$$\mathcal{M}\left\{\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)\right\}(s) = F\left(1-s\right);$$

$$\mathcal{M}\left\{(\ln x)^n f(x)\right\}(s) = \frac{d^n}{ds^n}F(s), \quad n \in \mathbb{N}.$$

4 (диференціювання оригіналу). Якщо $\mathcal{M}\{f(x)\}(s) = F(s)$, то

$$\mathcal{M}\{f'(x)\}(s) = -(s-1)F(s-1);$$

$$\mathcal{M}\{f''(x)\}(s) = (s-1)(s-2)F(s-2);$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mathcal{M}\{f^{(n)}(x)\}(s) = (-1)^n\,\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-n)}\,F(s-n),$$

якщо $x^{s-r-1}f^{(r)}(x) \to 0$, коли $x \to 0$, для $r = 0,1,2,\dots,(n-1)$.

5. Якщо $\mathcal{M}\{f(x)\}(s) = F(s)$, то

$$\mathcal{M}\{xf'(x)\}(s) = -sF(s);$$
$$\mathcal{M}\{x^2 f''(x)\}(s) = s^2 F(s);$$

....

$$\mathcal{M}\{x^n f^{(n)}(x)\}(s) = (-1)^n \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s)} F(s);$$
$$\mathcal{M}\left\{\left(x\frac{d}{dx}\right)^n f(x)\right\}(s) = (-1)^n s^n F(s).$$

6 (інтегрування оригіналу). Якщо $\mathcal{M}\{f(x)\}(s) = F(s)$, то

$$\mathcal{M}\left\{\int\limits_0^x f(t)dt\right\}(s) = (-1)^n \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+n)} F(s+n),$$
$$\mathcal{M}\left\{I_n f(x)\right\}(s) = -\frac{1}{s} F(s+1);$$

де $I_n f(x)$ є n-й ітерований інтеграл від $f(x)$, який означено формулою

$$I_n f(x) = \int\limits_0^x I_{n-1} f(t)dt.$$

7 (диференціювання зображення). Якщо $\mathcal{M}\{f(x)\}(s) = F(s)$, то

$$\mathcal{M}\{\ln x f(x)\}(s) = \frac{d}{ds} F(s).$$

8 (зображення згортки). Якщо $\mathcal{M}\{g(x)\}(s) = G(s)$, та $\mathcal{M}\{f(x)\}(s) = F(s)$, то

$$\mathcal{M}\{f(x) * g(x)\}(s) = \mathcal{M}\left\{\int\limits_0^{+\infty} f(t) g\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t}\right\}(s) = F(s)G(s);$$
$$\mathcal{M}\{f(x) \circ g(x)\}(s) = \mathcal{M}\left\{\int\limits_0^{+\infty} f(xt)g(t)dt\right\}(s) = F(s)G(1-s).$$

8.3. Застосування перетворення Мелліна

1. Розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$x^2 u''_{xx} + x u'_x + u''_{yy} = 0,\ 0 \le x < \infty,\ 0 < y < 1,$$

який справджує крайові умови:

$$u(x,0) = 0,\ \ u(x,1) = \begin{cases} A, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases}$$

де A — стала.

Розв'язання. Застосовуємо перетворення Мелліна за змінною x:

$$U(s,y) = \int\limits_0^{+\infty} x^{s-1} u(x,y)dx;$$

$$U''_{yy} + p^2 U = 0,\ 0 < y < 1,$$

де

$$U(s,0) = 0,\ \ U(s,1) = A\int\limits_0^1 x^{s-1}dx = \frac{A}{s}.$$

Розв'язком крайової задачі для диференціального рівняння щодо зображення є функція

$$U(s,y) = \frac{A}{p}\frac{\sin sy}{\sin s},\ \ 0 < \operatorname{Re} s < 1.$$

Застосовуючи обернене перетворення Мелліна, маємо

$$u(x,y) = \frac{A}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{-s}}{s}\frac{\sin sy}{\sin s}ds,$$

де $U(s,y)$ аналітична у вертикальній смузі $0 < \operatorname{Re} s = c < \pi$.

Підінтегральна функція має прості полюси у точках $s = n\pi, n \in \mathbb{N}$, які лежать усередині контуру інтегрування. Обчислюючи за допомогою лишків контурний інтеграл, маємо

$$u(x,y) = \frac{A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^n x^{-n\pi}\sin n\pi y,\ \ x > 1.$$

2. Розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма 1-го роду. Розв'язати інтегральне рівняння

$$\int\limits_0^{\infty} f(t)k(xt)dt = g(x),\ \ x > 0.$$

Розв'язання. Застосовуючи перетворення Мелліна до обох частин інтегрального рівняння, дістаємо

$$F(1-s)K(s) = G(s).$$

Замінюючи s на $1-s$, маємо

$$F(s) = G(1-s)H(s),$$

де $H(s) = \dfrac{1}{K(1-s)}$.

Застосовуючи до останньої рівності обернене перетворення Мелліна, дістаємо розв'язок інтегрального рівняння

$$f(x) = \mathcal{M}^{-1}\{G(1-s)H(s)\}(x) = \int\limits_0^{+\infty} g(t)h(st)dt,$$

де $h(x) = \mathcal{M}^{-1}\{H(s)\}(x)$ існує.

Зокрема, якщо $H(s) = K(s)$, то розв'язок інтегрального рівняння набуває вигляду:

$$f(x) = \int\limits_0^{+\infty} g(t)k(st)dt.$$

де $K(s)K(1-s) = 1$.

3. Розв'язати інтегральне рівняння

$$\int\limits_0^{+\infty} f(t)g\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t} = h(x),$$

де $f(x)$ невідома, а $g(x)$ та $h(x)$ відомі функції.

Розв'язання. Застосовуємо перетворення Мелліна:

$$F(s) = H(s)K(s),\ \ K(s) = \frac{1}{G(s)}.$$

Застосовуючи обернене перетворення Мелліна, дістаємо

$$f(x) = \mathcal{M}^{-1}\{H(s)K(s)\}(x) = \int\limits_0^{+\infty} h(t)k\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t}.$$