

ЛЕКЦІЯ 9. СКІНЧЕННІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є ТА ЛАПЛАСА

- 9.1. Скінченні синус- та косинус-перетворення Фур'є
- 9.2. Основні властивості скінченних перетворень Фур'є
- 9.3. Застосування скінченних перетворень Фур'є
- 9.4. Скінченне перетворення Лапласа
- 9.5. Основні властивості скінченного перетворення Лапласа

Скінченні синус- та косинус перетворення Фур'є означають як коефіцієнти відповідних синус- та косинус-рядів Фур'є.

Розгляд перетворення Лапласа на скінченному проміжку $[0; T]$ замість нескінченного $[0; +\infty)$ розширює клас функцій-оригіналів.

9.1. Скінченні синус- та косинус-перетворення Фур'є

1. Якщо f є неперервна або кусково неперервна функція на скінченному інтервалі $(0; a)$, *скінченим синус-перетворенням Фур'є* називають

$$\mathcal{F}_s\{f(x)\}(n) = \tilde{f}_s(n) = \int_0^a f(x) \sin\left(n \frac{\pi}{a} x\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Як відомо з теорії рядів Фур'є, ряд Фур'є за синусами для функції $f(x), 0 < x < a$,

$$\frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_s(n) \sin\left(n \frac{\pi}{a} x\right).$$

збігається до значення $f(x)$ у кожній точці неперервності функції f та до значення $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ у кожній точці розриву.

Обернене скінченне синус-перетворення Фур'є задає формула

$$\mathcal{F}_s^{-1}\{\tilde{f}_s(n)\}(x) = f(x) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_s(n) \sin\left(n \frac{\pi}{a} x\right).$$

Перетворення \mathcal{F}_s та \mathcal{F}_s^{-1} є лінійними.

2. Якщо f є неперервна або кусково неперервна функція на скінченному інтервалі $(0; a)$, *скінченим косинус-перетворенням Фур'є* називають

$$\mathcal{F}_c\{f(x)\}(n) = \tilde{f}_c(n) = \int_0^a f(x) \cos\left(n \frac{\pi}{a} x\right) dx, \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

Як відомо з теорії рядів Фур'є, ряд Фур'є за косинусами для функції $f(x), 0 < x < a$,

$$\frac{1}{a} \tilde{f}_c(0) + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_c(n) \cos\left(n \frac{\pi}{a} x\right)$$

збігається до значення $f(x)$ у кожній точці неперервності функції f та до значення $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ у кожній точці розриву.

Обернене скінченне косинус-перетворення Фур'є задає формула

$$\mathcal{F}_c^{-1}\{\tilde{f}_c(n)\}(x) = f(x) = \frac{1}{a} \tilde{f}_c(0) + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_c(n) \cos\left(n \frac{\pi}{a} x\right).$$

Перетворення \mathcal{F}_c та \mathcal{F}_c^{-1} є лінійними.

3. Знайдімо скінченні синус- та косинус-перетворення Фур'є функцій $f(x) = 1$ та $g(x) = x$.

Маємо:

$$\mathcal{F}_s\{1\}(n) = \int_0^a \sin\left(n \frac{\pi}{a} x\right) dx = \frac{a}{n\pi} (1 - (-1)^n),$$

$$\mathcal{F}_c\{1\}(n) = \int_0^a \cos\left(n \frac{\pi}{a} x\right) dx = \begin{cases} a, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_s\{x\}(n) = \int_0^a x \sin\left(n \frac{\pi}{a} x\right) dx = \frac{(-1)^{n+1} a^2}{n\pi},$$

$$\mathcal{F}_c\{x\}(n) = \int_0^a x \cos\left(n \frac{\pi}{a} x\right) dx = \begin{cases} \frac{a^2}{2}, & n = 0, \\ \left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 ((-1)^n - 1), & n \neq 0. \end{cases}$$

4. Функцію $f_1(x)$ називають *непарним періодичним продовженням* функції $f(x)$, з періодом 2π , якщо

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < \pi, \\ -f(-x), & -\pi < x < 0, \end{cases}$$

або, еквівалентно

$$\begin{aligned}f_1(x) &= f(x), 0 < x < \pi; \\f_1(-x) &= -f_1(x), \quad f_1(x + 2\pi) = f_1(x), x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

5. Функцію $f_2(x)$ називають *парним періодичним продовженням* функції $f(x)$, з періодом 2π , якщо

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < \pi, \\ f(-x), & -\pi < x < 0, \end{cases}$$

або, еквівалентно,

$$\begin{aligned}f_2(x) &= f(x), 0 < x < \pi; \\f_2(-x) &= f_2(x), \quad f_2(x + 2\pi) = f_2(x), x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

6. Згорткою неперервних періодичних функцій f та g , означених в інтервалі $(-\pi; \pi)$, називають функцію

$$f(x) * g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)g(u)du.$$

Згортка $f(x) * g(x)$ неперервна й періодична з періодом 2π .

Згортка функцій симетрична, тобто

$$f(x) * g(x) = g(x) * f(x).$$

Згортка двох парних чи непарних функцій є парною функцією. Згортка парної та непарної функції є непарною функцією.

9.2. Основні властивості скінченних перетворень Фур'є

1. Перетворення похідних.

$$\mathcal{F}_s\{f'(x)\}(n) = -\left(n \frac{\pi}{a}\right) \tilde{f}_c(n),$$

$$\mathcal{F}_s\{f''(x)\}(n) = -\left(n \frac{\pi}{a}\right)^2 \tilde{f}_s(n) + \left(n \frac{\pi}{a}\right) (f(0) + (-1)^{n+1} f(a)),$$

$$\mathcal{F}_c\{f'(x)\}(n) = \left(n \frac{\pi}{a}\right) \tilde{f}_s(n) + (-1)^n f(a) - f(0),$$

$$\mathcal{F}_c\{f''(x)\}(n) = -\left(n \frac{\pi}{a}\right)^2 \tilde{f}_c(n) + (-1)^n f'(a) - f'(0).$$

2. **Властивість непарного продовження.** Якщо f_1 — непарне продовження функції f з періодом 2π , то для будь-якої сталої α правдиві формули:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s\{f_1(x - \alpha) + f_1(x + \alpha)\}(n) &= 2 \cos n\alpha \mathcal{F}_s\{f(x)\}(n); \\ \mathcal{F}_s\{f_1(x + \alpha) - f_1(x - \alpha)\}(n) &= 2 \sin n\alpha \mathcal{F}_s\{f(x)\}(n).\end{aligned}$$

3. Властивість непарного продовження. Якщо f_2 — парне періодичне продовження функції f з періодом 2π , то для будь-якої сталої α правдива формула

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c\{f_2(x - \alpha) + f_2(x + \alpha)\}(n) &= 2 \cos n\alpha \mathcal{F}_c\{f(x)\}(n); \\ \mathcal{F}_c\{f_2(x - \alpha) - f_2(x + \alpha)\}(n) &= 2 \sin n\alpha \mathcal{F}_c\{f(x)\}(n).\end{aligned}$$

4. Зображення згортки. Якщо $f_1(x)$ та $g_1(x)$ є непарними періодичними продовженнями, а $f_2(x)$ та $g_2(x)$ є парними періодичними продовженнями функцій $f(x)$ та $g(x)$ на проміжку $(0; \pi)$, то

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c\{f_1(x) * g_1(x)\}(n) &= -2\tilde{f}_s(n)\tilde{g}_s(n), \\ \mathcal{F}_c\{f_2(x) * g_2(x)\}(n) &= 2\tilde{f}_c(n)\tilde{g}_c(n), \\ \mathcal{F}_s\{f_1(x) * g_2(x)\}(n) &= 2\tilde{f}_s(n)\tilde{g}_c(n), \\ \mathcal{F}_s\{f_2(x) * g_1(x)\}(n) &= 2\tilde{f}_c(n)\tilde{g}_s(n).\end{aligned}$$

Або

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c^{-1}\{\tilde{f}_s(n)\tilde{g}_s(n)\}(x) &= -\frac{1}{2}f_1(x) * g_1(x), \\ \mathcal{F}_c^{-1}\{\tilde{f}_c(n)\tilde{g}_c(n)\}(x) &= \frac{1}{2}f_2(x) * g_2(x), \\ \mathcal{F}_s^{-1}\{\tilde{f}_s(n)\tilde{g}_c(n)\}(x) &= \frac{1}{2}f_1(x) * g_2(x), \\ \mathcal{F}_s^{-1}\{\tilde{f}_c(n)\tilde{g}_s(n)\}(x) &= \frac{1}{2}f_2(x) * g_1(x).\end{aligned}$$

5. Приміром, знайдемо обернений скінченний косинус-перетвір Фур'є

$$\frac{1}{n^2 - a^2}.$$

Можна записати, для $n \neq 0$, що

$$\frac{1}{n^2 - a^2} = \frac{n(-1)^{n+1}}{n^2 - a^2} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \tilde{f}_s(n)\tilde{g}_s(n),$$

де

$$\begin{aligned}\tilde{f}_s(n) &= \frac{n(-1)^{n+1}}{n^2 - a^2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{\sin ax}{\sin a\pi} \\ \tilde{g}_s(n) &= \frac{(-1)^{n+1}}{n} \Leftrightarrow g(x) = \frac{x}{\pi}.\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c^{-1}\left\{\frac{1}{n^2 - a^2}\right\}(x) &= -\frac{1}{2}f_1(x) * g_1(x) = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x-u)g_1(u)du = \\ &= -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x-u)\frac{u}{\pi}du = -\frac{\cos a(\pi-x)}{a \sin a\pi},\end{aligned}$$

де $f_1(x)$ — періодичне продовження з періодом 2π непарної функції $f(x)$.

9.3. Застосування скінченних перетворень Фур'є

Розгляньмо крайову задачу Діріхле для рівняння теплопровідності:

$$u'_t = ku''_{xx}, \quad 0 \leq x \leq a, t > 0,$$

з крайовими та початковими умовами:

$$u(0, t) = 0 = u(a, t),$$

$$u(0, x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq a.$$

Якщо застосувати скінченне синус-перетворення Фур'є до цієї крайової задачі, то одержимо таку задачу Коші:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{u}_s}{dt} + k\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \tilde{u}_s &= 0, \\ \tilde{u}_s(n, 0) &= \tilde{f}_s(n),\end{aligned}$$

для відповідного перетвору

$$\tilde{u}_s(n) = \mathcal{F}_s\{u(x, t)\}(n).$$

Розв'язком задачі Коші є функція

$$\tilde{u}_s(n, t) = \tilde{f}_s(n) \exp\left\{-k\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 t\right\}.$$

Застосування оберненого скінченного синус-перетворення Фур'є приводить до розв'язку

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_s(n) \exp\left\{-k\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 t\right\} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \\ &= \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-k\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 t\right\} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \int_0^a f(\xi) \sin\left(\frac{n\pi \xi}{a}\right) d\xi.\end{aligned}$$

Зокрема, для $f(x) = T_0$ маємо

$$u(x, t) = \frac{2T_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \exp\left\{-k\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 t\right\} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right).$$

9.4. Скінченне перетворення Лапласа

За допомогою перетворення Лапласа зазвичай знаходять реакцію лінійних систем

$$L[y(t)] = f(t),$$

на зовнішнє збурення $f(t)$, яке починає діяти для $t \geq 0$.

Але якщо збурення $f(t) = \exp(at^2)$, $a > 0$, звичайне перетворення Лапласа вже не можна застосувати для розв'язання такого рівняння, оскільки перетвір Лапласа функції $f(t)$ не існує. З фізичного погляду, немає причин відкидати з розгляду таке й подібні до нього збурення.

Це приводить до ідеї розглянути скінченне перетворення Лапласа на проміжку $[0; T]$, для того щоб розширити можливості застосування перетворення Лапласа на нескінченному проміжку $[0; +\infty)$.

1. Нехай функція f є неперервною або кусково-неперервною функцією в інтервалі $(0; T)$.

Скінченне перетворення Лапласа функції f в інтервалі $(0; T)$ задає формула

$$\mathcal{L}_T\{f(t)\}(p) = F(p, T) = \int_0^T f(t)e^{-pt} dt,$$

де $p \in \mathbb{C}$, $T \in \mathbb{R}$.

Обернене скінченне перетворення Лапласа задає формула

$$\mathcal{L}_T^{-1}\{F(p, T)\}(t) = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p, T)e^{pt} dp.$$

Перетворення \mathcal{L}_T та \mathcal{L}_T^{-1} є лінійними.

2. Знайдімо скінченні перетворення Лапласа деяких функцій.

A. $f(t) = \exp\{at^2\}$.

$$\begin{aligned} F(p, T) &= \mathcal{L}_T\{\exp(at^2)\}(p) = \int_0^T \exp(-pt + at^2) dt = \\ &= \exp\left(-\frac{p^2}{4a}\right) \int_0^T \exp\left(-\left(\sqrt{at} - \frac{p}{2\sqrt{a}}\right)i\right)^2 dt = \\ &= \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{p^2}{4a}\right) \left[\operatorname{erf}\left\{\left(\sqrt{a}T - \frac{p}{2\sqrt{a}}\right)i\right\} - \operatorname{erf}\left(\frac{pi}{2\sqrt{a}}\right) \right], \end{aligned}$$

де $\operatorname{erf}(x)$ — функція помилок.

Б. $f(t) = 1$.

$$F(p, T) = \mathcal{L}_T\{1\}(p) = \int_0^T e^{-pt} dt = \frac{1 - e^{-pT}}{p}.$$

В. $f(t) = e^{at}$.

$$F(p, T) = \mathcal{L}_T\{e^{at}\}(p) = \int_0^T e^{-(p-a)t} dt = \frac{1 - e^{-(p-a)T}}{p - a}.$$

Г. $f(t) = \sin at$.

$$\mathcal{L}_T\{\sin at\}(p) = \int_0^T \sin ate^{-pt} dt = \frac{a}{p^2 + a^2} - \frac{e^{-pT}}{p^2 + a^2} (p \sin aT + a \cos aT).$$

Г. $f(t) = t$.

$$\mathcal{L}_T\{t\}(p) = \int_0^T te^{-pt} dt = \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-pT}}{p} \left(\frac{1}{p} + T \right).$$

3. Якщо $0 < a < T$ та $f(t) = 0, -a < t < 0$, то

$$\mathcal{L}_T\{f(t - a)\}(p) = -e^{aP} \int_0^{T-a} e^{-\tau p} f(\tau) d\tau = e^{-ap} F(p, T - a).$$

Зокрема,

$$\mathcal{L}_T\{\eta(t - a)\}(p) = -e^{aP} \int_0^{T-a} e^{-\tau p} f(\tau) d\tau = \frac{1}{p} (e^{-ap} - e^{-pT}).$$

9.5. Основні властивості скінченного перетворення Лапласа

1 (зсув аргументу зображення). Якщо $\mathcal{L}_T\{f(t)\}(p) = F(p, T)$, то

$$\mathcal{L}_T\{e^{-at} f(t)\}(p) = F(p + a, T).$$

2 (подібність). Якщо $\mathcal{L}_T\{f(t)\}(p) = F(p, T)$, то

$$\mathcal{L}_T\{f(at)\}(p) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}, aT\right).$$

3 (диференціювання оригіналу). Якщо $\mathcal{L}_T\{f(t)\}(p) = F(p, T)$,

$$\mathcal{L}_T\{f'(t)\}(p) = pF(p, T) - f(0) + e^{-pT}f(T);$$

$$\mathcal{L}_T\{f''(t)\}(p) = p^2F(p, T) - pf(0) - f'(0) + pe^{-pT}f(T) + f'(T);$$

$$\mathcal{L}_T\{f^{(n)}(t)\}(p) = p^n F(p, T) - \sum_{k=1}^n p^{n-k} f^{(k-1)}(0) + e^{-pT} \sum_{k=1}^n p^{n-k} f^{(k-1)}(T).$$

4 (інтегрування оригіналу). Якщо $\mathcal{L}_T\{f(t)\}(p) = F(p, T)$ та

$$F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau, \text{ то}$$

$$\mathcal{L}_T\{F(t)\}(p) = \frac{1}{p} \left\{ F(p, T) - e^{-pT}F(T) \right\}.$$

5 (диференціювання зображення). Якщо $\mathcal{L}_T\{f(t)\}(p) = F(p, T)$,

то

$$\frac{d^n}{dp^n} F(p, T) = \mathcal{L}_T\{(-t)^n f(t)\}(p).$$

6 (інтегрування зображення). Якщо $\mathcal{L}_T\{f(t)\}(p) = F(p, T)$ й існує

$$\mathcal{L}_T\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(p), \text{ то}$$

$$\int_p^T F(p, T) dp = \mathcal{L}_T\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(p) - \int_0^T \frac{f(t)}{t} e^{-Tt} dt.$$