ЛЕКЦІЯ 10. ДИСКРЕТНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

10.1. Послідовності

1. Під час вивчення дискретних процесів розглядають послідовності величин $x(n\tau)$ в дискретні моменти $t = n\tau$, де τ — інтервал дискретизації, $n \in \mathbb{N}$. При заданому значенні τ позначення $x(n\tau)$ можна замінити на $x(n)$.

У теорії дискретних перетворень вивчають як скінченні послідовності, для яких $0 \leq n \leq N-1$, так послідовності, для яких $n \in \mathbb{Z}$.

Послідовність $x(n)$ називають *періодичною з періодом* N, якщо для всіх значень n виконано умову

$$x(n+N) = x(n).$$

2. Розглянього δ_1-послідовність, яку означують так (рис. 1)

$$\delta_1(n) = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ 1, & n = 0, \end{cases}$$

та східчасту послідовність (рис. 2).

$$u(n) = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 1, & n \geq 0. \end{cases}$$

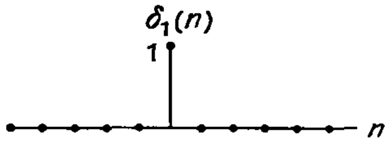

Рис. 1

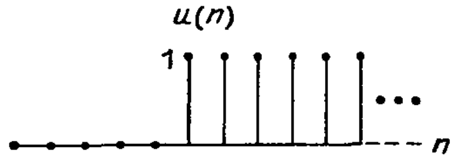

Рис. 2

Зв'язок між цими послідовностями виражають формули:

$$u(n) = \sum_{\xi=-\infty}^{n} \delta_1(\xi),$$

$$\delta_1(n) = u(n) - u(n-1).$$

Будь-яку послідовність можна задати за допомогою δ_1-послідовності:

$$x(n) = \sum_{\xi=-\infty}^{+\infty} x(\xi)\delta_1(n-\xi).$$

3. Парна та непарна частини послідовності. Розгляньмо таку послідовність $x(n)$, що $x(n) = 0, n < 0$ (рис. 3). Її можна зобразити у вигляді

$$x(n) = x_{\text{п}}(n) + x_{\text{н}}(n),$$

де $x_{\text{п}}(n) = \dfrac{1}{2}(x(n) + x(-n))$ — парна частина послідовності (рис. 4), $x_{\text{н}}(n) = \dfrac{1}{2}(x(n) - x(-n))$ — непарна частина послідовності (рис. 5).

Рис. 3

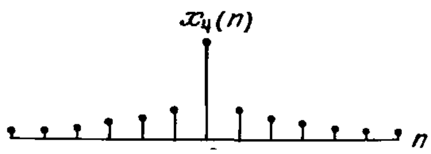

Рис. 4

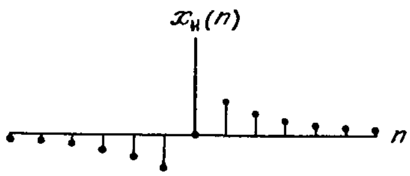

Рис. 5

10.2. Дискретне перетворення Фур’є

1. *Пряме й обернене дискретні перетворення Фур’є* послідовності $x(n)$ означують формулами:

$$X(k) = \mathcal{F}_d\left\{x(n)\right\}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-\frac{i2\pi kn}{N}}, k = 0,1,\ldots,N-1;$$

$$x(n) = \mathcal{F}_d^{-1}\left\{X(k)\right\}(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(k)e^{\frac{i2\pi kn}{N}}, n = 0,1,\ldots,N-1.$$

Якщо позначити $w_N = e^{-\frac{i2\pi}{N}}$, то формули перетворень можна записати так:

$$X(k) = \mathcal{F}_d\left\{x(n)\right\}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) w_N^{kn}, k = 0,1,...,N-1;$$
$$x(n) = \mathcal{F}_d^{-1}\left\{X(k)\right\}(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(k) w_N^{-kn}, n = 0,1,...,N-1.$$

2. Знайдімо дискретне перетворення Фур'є послідовності $1,0,0,1$.

Розв'язання. $N = 4$.

$$x(0) = 1, x(1) = 0, x(2) = 0, x(3) = 1.$$
$$X(0) = \sum_{n=0}^{3} x(n) e^{i0} = 1 + 0 + 0 + 1 = 2.$$
$$X(1) = \sum_{n=0}^{3} x(n) e^{-i\pi n/2} = 1 + 0 + 0 + e^{-i3\pi/2} = 1 + i;$$
$$X(2) = \sum_{n=0}^{3} x(n) e^{-i\pi n} = 1 + 0 + 0 + e^{-i3\pi} 1 - 1 = 0;$$
$$X(3) = \sum_{n=0}^{3} x(n) e^{-i3\pi n/2} = 1 + 0 + 0 + e^{-i9\pi/2} = 1 - i.$$

3. Дискретні перетворення Фур'є можна розгладати як лінійне перетворення послідовностей $x(n)$ та $X(k)$:

$$\vec{X} = W_N \vec{x},$$
$$\vec{x} = W_N^{-1} \vec{X},$$

де

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix}, W_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w_N^{1\cdot 1} & w_N^{2\cdot 1} & \cdots & w_N^{(N-1)\cdot 1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & w_N^{1\cdot(N-1)} & w_N^{2\cdot(N-1)} & \cdots & w_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix},$$

Матриця W_N симетрична й ортогональна.

10.3. Властивості дискретного перетворення Фур'є

1 (періодичність). Якщо $x(n)$ та $X(k)$ пара дискретних перетворів Фур'є, то

$$x(n+N) = x(n),$$
$$X(k+N) = X(k).$$

2 (лінійність). Якщо $\mathcal{F}_d\left\{x(n)\right\}(k) = X(k)$ та $\mathcal{F}_d\left\{y(n)\right\}(k) = Y(k)$, то

$$\mathcal{F}_d\left\{\alpha x(n) + \beta y(n)\right\}(k) = \alpha X(k) + \beta Y(k).$$

3 (симетрія). Запишімо N-точкові послідовності в алгебричній формі:

$$x(n) = x_r(n) + ix_i(n), 0 \le n \le N-1,$$
$$X(k) = X_r(k) + iX_i(k), 0 \le n \le N-1,$$

де $x_r(n) = \operatorname{Re} x(n), x_i(n) = \operatorname{Im} x(n), X_r(k) = \operatorname{Re} X(k), X_i(k) = \operatorname{Im} X(k)$.

Співвідношення, які означують дискретне перетворення Фур'є тоді можна переписати так:

$$X_r(k) = \sum_{n=0}^{N-1}\left[x_r(n)\cos\frac{2\pi kn}{N} + x_i(n)\sin\frac{2\pi kn}{N}\right],$$
$$X_r(k) = -\sum_{n=0}^{N-1}\left[x_r(n)\sin\frac{2\pi kn}{N} - x_i(n)\cos\frac{2\pi kn}{N}\right],$$
$$x_r(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[X_r(k)\cos\frac{2\pi kn}{N} - X_i(k)\sin\frac{2\pi kn}{N}\right],$$
$$x_i(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[X_r(k)\sin\frac{2\pi kn}{N} + X_i(k)\cos\frac{2\pi kn}{N}\right].$$

4. Дійсні парні послідовності. Якщо послідовність $x(n)$ є дійсною та парною, тобто

$$x(n) = X(N-n), \quad 0 \le n \le N-1,$$

то

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cos\frac{2\pi kn}{N}, \ 0 \le n \le N-1,$$
$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(k)\cos\frac{2\pi kn}{N}, \ 0 \le k \le N-1.$$

5. Дійсні непарні послідовності. Якщо послідовність $x(n)$ є дійсною та непарною, тобто

$$x(n) = -x(N-n),$$

то

$$X(k) = -i\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\sin\frac{2\pi kn}{N},\ \ 0 \le n \le N-1,$$
$$x(n) = \frac{i}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(k)\sin\frac{2\pi kn}{N},\ \ 0 \le k \le N-1.$$

6. Якщо $\mathcal{F}_d\{x(n)\}(k) = X(k),$ то

$$\mathcal{F}_d\{x(N-n)\}(k) = X(N-k).$$