

ЛЕКЦІЯ 11. Z-ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПАЛАСА ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

- 11.1. Ґратчасті функції
- 11.2. Означення z-перетворення
- 11.3. Властивості z-перетворення
- 11.4. Відновлення функції за z-зображенням
- 11.5. Розв'язання лінійних різницьових рівнянь за допомогою z-перетворення

11.1. Ґратчасті функції

1. У застосуваннях часто розглядають функції $f(t)$, які означені в дискретних точках $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ проміжку $T, t_{n+1} > t_n$. Такі функції називають *ґратчастими*.

На рис. 1 зображено графік функції $f(t) = t^2, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Позначаючи

$$f_n = f(n) = f(t_n), n \in \mathbb{Z},$$

дістаємо послідовність значень ґратчастої функції.

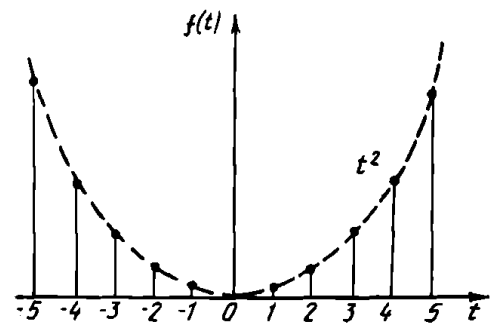


Рис. 1

2. Скінченні різниці ґратчастих функцій. *Скінченною різницею 1-го порядку* $\Delta f(n)$ ґратчастої функції $f(n)$ називають вираз

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n).$$

Скінченною різницею 2-го порядку $\Delta^2 f(n)$ ґратчастої функції $f(n)$ називають вираз

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(n) &= \Delta(\Delta f(n)) = \Delta f(n+1) - \Delta f(n) = \\ &= f(n+2) - 2f(n+1) + f(n). \end{aligned}$$

Скінченною різницею m-го порядку $\Delta^m f(n)$ ґратчастої функції $f(n)$ називають вираз

$$\Delta^m f(n) = \Delta(\Delta^{m-1} f(n)) = \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k f(n+m-k),$$

де C_m^k — біноміальні коефіцієнти.

3. Можна виразити ґратчасту функцію через її різниці різних порядків. Справді,

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n) + \Delta f(n); \\ f(n+2) &= f(n) + 2\Delta f(n) + \Delta^2 f(n). \end{aligned}$$

За індукцією можна одержати формулу:

$$f(n+m) = f(n) + \sum_{k=1}^m C_m^k \Delta^k f(n).$$

Зокрема, для $n = 0$ дістаємо формулу

$$f(m) = f(0) + \sum_{k=1}^m C_m^k \Delta^k f(0),$$

Одержані формули є дискретними аналогами формул Тейлора для неперервних функцій.

4. Знайдімо, приміром, скінченні різниці 1-го та 2-го порядку від $f(n) = an + b$, та $g(n) = e^{an}$, де a та b сталі.

$$\Delta f(n) = a(n+1) + b - an - b = a;$$

$$\Delta^2 f(n) = a(n+2) + b - 2(a(n+1) + b) + an + b = 0;$$

$$\Delta g(n) = e^{a(n+1)} - e^{an} = e^{an}(e^a - 1);$$

$$\Delta^2 g(n) = e^{a(n+2)} - 2e^{a(n+1)} + e^{an} = e^{an}(e^{2a} - 2e^a + 1) = e^{an}(e^a - 1)^2.$$

5. Згортка ґратчастих функцій. *Згорткою* двох ґратчастих функцій $f(n)$ та $g(n)$ називають ґратчасту функцію

$$f(n) * g(n) = \sum_{k=0}^n f(k)g(n-k).$$

11.2. Означення z-перетворення

1. Нехай $f(n)$ — ґратчаста функція, причому $f(n) = 0$, для $n < 0$. Отже, так само як і в теорії перетворення Лапласа, можна вважати, що ґратчасті функції помножено на одиничну ґратчасту функцію

$$1(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & 0 < 0. \end{cases}$$

Функцію $F(z)$ комплексної змінної z , яку означають рівністю

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{z^n} \quad (1)$$

називають *z-перетворенням* (*перетворенням Лорана*) гратчастої функції $f(n)$ і позначають

$$f(n) \rightarrow \mathcal{Z}\{f(n)\}(z) = F(z).$$

2. Знайдімо область збіжності ряду Лорана (1). Нехай існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f(n)|} = R$. Тоді, на підставі ознаки Коші, ряд (1) збігається абсолютно, якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{f(n)}{z^n} \right|} = \frac{1}{|z|} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f(n)|} = \frac{R}{|z|} < 1.$$

Звідси випливає, що ряд (1) збігається абсолютно в області $|z| > R$.

3. Знайдімо *z-перетворення* деяких функцій.

A. $f(n) = 1(n)$.

$$1(n) \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1.$$

Так само, $(-1)^n \rightarrow \frac{1}{1 + z^{-1}}, |z| > 1$.

B. $f(n) = a^n e^{\alpha n}$.

$$a^n e^{\alpha n} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n e^{\alpha n}}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{ae^{\alpha}}{z} \right)^n = \frac{1}{1 - ae^{\alpha} z^{-1}}, \quad |z| > |a| e^{\alpha}.$$

Зокрема, для $a = 1$ маємо

$$e^{\alpha n} \rightarrow \frac{1}{1 - e^{\alpha} z^{-1}}, \quad |z| > e^{\alpha}.$$

Для $\alpha = 0$ маємо

$$a^n \rightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|.$$

B. $f(n) = \frac{a^n}{n!}$.

$$\frac{a^n}{n!} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n! z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{a}{z} \right)^n = e^{a/z}.$$

11.3. Властивості z-перетворення

1 (лінійність). Якщо $f(n) \rightarrow F(z), g(n) \rightarrow G(z)$, то для будь-яких $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$ правдиве співвідношення

$$\alpha f(n) + \beta g(n) \rightarrow \alpha F(z) + \beta G(z).$$

Приміром,

$$\begin{aligned} a^n \sin \beta n &= a^n \frac{e^{i\beta n} - e^{-i\beta n}}{2i} \rightarrow \frac{1}{2i} (\mathcal{Z}\{a^n e^{i\beta n}\}(z) - \mathcal{Z}\{a^n e^{-i\beta n}\}(z)) = \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{1 - ae^{i\beta} z^{-1}} - \frac{1}{1 - ae^{-i\beta} z^{-1}} \right) = \frac{1}{2i} \frac{1 - ae^{-i\beta} z^{-1} - 1 + ae^{i\beta} z^{-1}}{(1 - ae^{i\beta} z^{-1})(1 - ae^{-i\beta} z^{-1})} = \\ &= \frac{az^{-1} \sin \beta}{1 - az^{-1}(e^{i\beta} + e^{-i\beta}) + a^2 z^{-2}} = \frac{a \sin \beta z^{-1}}{1 - 2a \cos \beta z^{-1} + a^2 z^{-2}}. \end{aligned}$$

Так само,

$$a^n \cos \beta n \rightarrow \frac{1 - a \cos \beta z^{-1}}{1 - 2a \cos \beta z^{-1} + a^2 z^{-2}}$$

2 (запізнення та випередження). Нехай $f(n)$ ґратчаста функція.

Розгляньмо ще такі ґратчасті функції:

$$f_1(n) = \begin{cases} 0, & n = -(k+1), -(k+2), \dots; \\ f(n-k), & n = -k, -k+1, \dots, 0, 1, 2, \dots; \end{cases}$$

$$f_2(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, 1, \dots, k-1, \\ f(n-k), & n = k, k+1, \dots; \end{cases}$$

Графік функції $f_1(n)$ дістаємо з графіка функції $f(n)$ зміщенням на k одиниць праворуч уздовж осі n (аргумент $f_1(n)$ запізнюється на k), а графік функції $f_2(n)$ — зміщенням на k одиниць праворуч (аргумент $f_2(n)$ випереджає на k) (рис. 2).

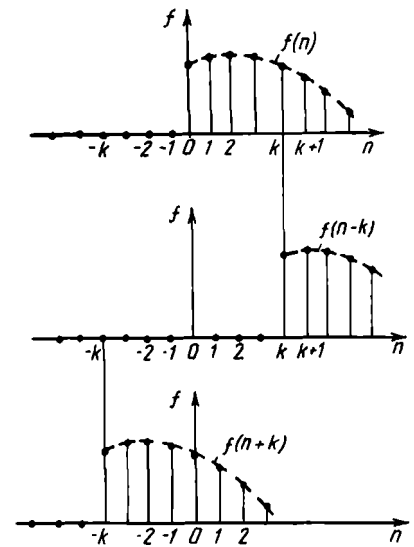


Рис. 2

Отже,

$$\{f(n-k)\} = \underbrace{\{0, 0, \dots, 0\}}_{k \text{ разів}}, f(0), f(1), \dots;$$

$$\{f(n+k)\} = \{f(k), f(k+1), \dots\}.$$

Тоді,

$$\begin{aligned} f_1(n) &= f(n-k) \rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f(n-k)}{z^n} = \left| n-k = m \right| = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f(m)}{z^{m+k}} = \frac{1}{z^k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f(m)}{z^m} = z^{-k} F(z). \end{aligned}$$

Так само,

$$\begin{aligned} f_2(n) = f(n+k) &\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n+k)}{z^n} = |n+k=m| = \\ &= \sum_{m=k}^{\infty} \frac{f(m)}{z^{m-k}} = \frac{1}{z^k} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f(m)}{z^m} - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{f(m)}{z^m} \right) = \frac{F(z)}{z^k} - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{f(m)}{z^{m-k}}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} f(n-k) &\rightarrow z^{-k}F(z); \\ f(n+k) &\rightarrow \frac{F(z)}{z^k} - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{f(m)}{z^{m-k}}. \end{aligned}$$

Приміром,

$$e^{\alpha(n-k)} = z^{-k} \frac{1}{1 - e^{\alpha}z^{-1}} = \frac{z^{-k}}{1 - e^{\alpha}z^{-1}}.$$

3. Якщо $f(n) \rightarrow F(z)$, то

$$a^{-n}f(n) \rightarrow F(az).$$

4 (диференціювання зображення). Якщо $f(n) \rightarrow F(z)$, то

$$nf(n) = -zF'(z).$$

$$n^2f(n) \rightarrow -z(-zF'(z))' = z^2F''(z) + zF'(z).$$

Приміром,

$$n \rightarrow -z \left(\frac{1}{1-z^{-1}} \right)' = -z \left(-\frac{1}{(1-z^{-1})^2} z^{-2} \right) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}.$$

5 (зображення згортки). Якщо $f(n) \rightarrow F(z)$, $g(n) \rightarrow G(z)$, то

$$f(n) * g(n) \rightarrow F(z)G(z).$$

Приміром, знайдемо z -зображення $S(n) = \sum_{k=0}^n f(k)$.

Оскільки $S(n) = f(n) * 1(n)$ та $1(n) \rightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}$, то

$$\sum_{k=0}^n f(n) \rightarrow F(z) \frac{1}{1-z^{-1}}.$$

6 (граничні значення). Якщо зображення $F(z) \leftarrow f(n)$ існує, то

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F^*(z).$$

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ існує, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{z \rightarrow 1+0} (z-1)F^*(z).$$

11.4. Відновлення функції за z -зображенням

1. Нехай $f(n) \rightarrow F(z)$. Тоді

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(z)z^{n-1}dz, \quad n = 0, 1, \dots,$$

де Γ — будь-яке коло радіусом $|z| = R_1 > R$, яке обходиться проти годинникової стрілки.

У загальному випадку інтеграл можна обчислити за допомогою лишків. А саме:

$$f(n) = \sum_k \operatorname{res}_{z=z_0} (F(z)z^{n-1}).$$

2. Нехай z -перетворення функції $f(n)$ є функція вигляду $F(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$, причому $F(z)$ має лише прості полюси z_1, z_2, \dots, z_N . Тоді

$$f(n) = \sum_{k=1}^n \frac{A(z_k)}{B'(z_k)} z_k^{n-1}.$$

11.5. Розв'язання лінійних різницевих рівнянь за допомогою z -перетворення

1. Нехай задано лінійне різницеве рівняння k -го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$a_0 x(n+k) + a_1 x(n+k-1) + \dots + a_k x(n) = f(n)$$

і початкові умови:

$$x(0) = x_0, x(1) = x_1, \dots, x(k-1) = x_{k-1}.$$

Розв'язання лінійних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами методом z -перетворень провадять за схемою застосування перетворення Лапласа до розв'язання диференціальних рівнянь.

Застосовуючи z -перетворення з урахуванням його властивостей до обох частин різницевого рівняння, дістанемо алгебричне операторне рівняння щодо функції $X(z) \leftarrow x(n)$. За знайденим розв'язком $X(z)$ відновимо шуканий розв'язок — гратчасту функцію $x(n)$.

2. Розв'язати рівняння

$$x(n+2) - 5x(n+1) + 6x(n) = 0, x(0) = 1, x(1) = 2.$$

Розв'язання.

Нехай $x(n) \rightarrow X(z)$. Тоді, враховуючи початкові умови, маємо:

$$x(n+1) \rightarrow zX(z) - x(0)z = zX(z) - z;$$

$$x(n+2) \rightarrow z^2X(z) - x(0)z^2 - x(1)z = z^2X(z) - z^2 - 2z.$$

Застосовуючи z -перетворення до обох частин різницевого рівняння, дістаємо операторне рівняння щодо функції $X(z)$:

$$z^2X(z) - z^2 - 2z - 5zX(z) + 5z + 6X(z) = 0;$$

$$(z^2 - 5z + 6)X(z) = z^2 - 3z.$$

Звідки,

$$X(z) = \frac{z^2 - 3z}{z^2 - 5z + 6} = \frac{z}{z - 2} = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} \leftarrow 2^n = x(n).$$