ЛЕКЦІЯ 12. ПЕРЕТВОРЕННЯ ВОЛША — АДАМАРА ТА ПЕРЕТВОРЕННЯ ГААРА

12.1. Функції Волша

1. Розгляньмо нормовані *функції Волша* $wal(n,\theta)$, де n — номер функції, а $\theta \in [0;1)$, означені на проміжку $[0;1]$, які набувають на цьому відрізку лише значення ± 1. Перші 8 функцій подано на рис. 1. Зазвичай розглядають множину функцій Волша $wal(n,\theta)$ для $n = 0,1,\ldots,N-1$, де $N = 2^i, i \in \mathbb{N}$.

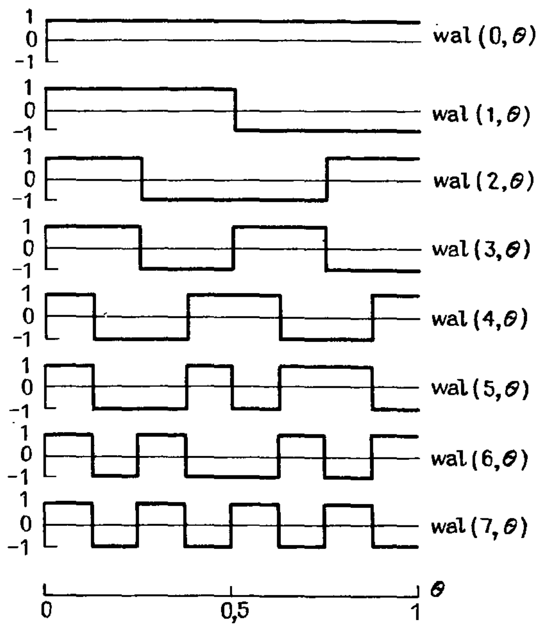

Рис. 1

2. Функції Волша розрізняють за їх порядком та рангом. Під *порядком* функції Волша розуміють максимальний з номерів розрядів числа n, які містять одиницю, *рангом* називають кількість одиниць у двійковому виразі n. Приміром, оскільки $5 = 101_2$, то порядок та ранг функції $wal(5,\theta)$ дорівнюють відповідно 3 та 2.

3. Для формування функцій Волша можна використовувати той факт, що добуток двох функцій Волша дає деяку іншу функцію Волша.

Якщо n_1 та n_2 — номери функцій Волша, то

$$wal(n_1,\theta)\cdot wal(n_2,\theta) = (n_1 \oplus n_2,\theta),$$

де $\oplus$ — побітове додавання за модулем 2:

$$0\oplus 0 = 1,\ \ 0\oplus 1 = 1\oplus 0 = 1,\ \ 1\oplus 1 = 0.$$

Приміром, якщо $n_1 = 3 = 011_2$ та $n_2 = 5 = 110_2$, то

$$n_1 \oplus n_2 = 110_2 = 6.$$

Отже,

$$wal(6,\theta) = wal(3,\theta)\cdot wal(5,\theta).$$

4. На рис. 2 ще раз подано перші вісім функцій Волша та для порівняння пунктирними лініями зображено тригонометричні функції. З подібності до тригонометричних функцій функції Волша з непарними номерами ще позначають $sal(\xi,\theta), \xi = 1,3,5,...$, а з парними $cal(\xi,\theta), \xi = 0,2,4,...$.

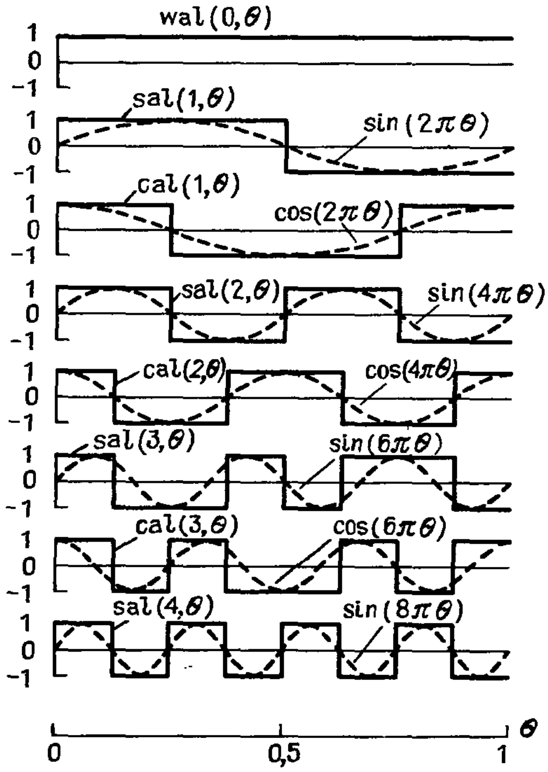

Рис. 2

5. Значення ξ зв'язані з поняттям *частості* — кількості перетинів з лінією нульового рівня (в інтервалі значень θ від 0 до 1), графіка функції Волша. Якщо немає перетинів, то $\xi = 0$. Якщо кількість перетинів η парна, то $\xi = \frac{\eta}{2}$, а якщо непарна, то $\xi = \frac{\eta+1}{2}$. Частість збігається з частотою відповідної тригонометричної функції.

6. На рис. 1 та 2 було подано функції Волша, упорядковані за частістю. Таке упорядкування називають упорядкування за Волшем (позначають $wal_w(n,\theta)$.

Використовують також упорядкування функцій Волша за Адамаром (позначають $wal_h(h,\theta) = had(h,\theta)$) (рис. 3).

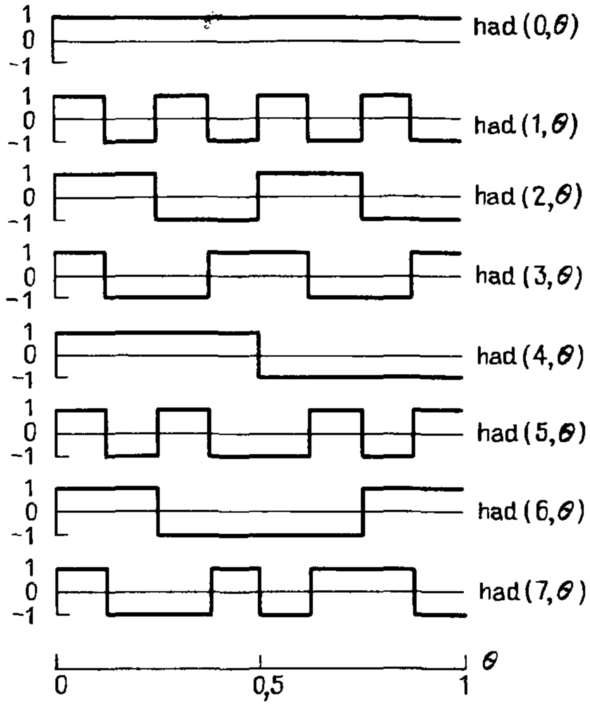

Рис. 3

7. *Дискретні функції Волша* одержують з неперервних при відліку їхніх значень у відповідних точках інтервалу, на якому вони задані. Сукупність дискретних значень функцій Волша записують як матрицю, у кожному рядку якої вказується стільки дискретних значень, скільки береться для дискретизації точок:

$$H_w(3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H_h(3)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

де $H_w(\gamma)$ — відповідає упорядкуванню за Волшем, а $H_h(\gamma)$ — відповідає упорядкування за Адамаром, $\gamma = \log_2 N$.

8. Функції Волша є окремим випадком *функцій Адамара*, які відповідають матрицям Адамара.

Матриці Адамара рекурсивно будують так:

$$H_1 = (1);$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, H_4 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right);$$

$$H_N = \begin{bmatrix} H_{N/2} & H_{N/2} \\ H_{N/2} & -H_{N/2} \end{bmatrix}, N = 2^n, n \in \mathbb{N}.$$

До матриць Адамара належать також і будь-які матриці з елементами 1 та -1, кожні 2 рядки якої є ортогональними.

Матриці Адамара мають властивості:

1) після переставлення рядків (стовпців) та зміни знаків усіх елементів рядка (стовпця) така матриця залишається матрицею Адамара;

2) матриця, одержана підставленням замість $+1$ в матрицю Адамара деякої іншої матриці Адамара H і підставлення замість -1 матриці $(-H)$, також є матрицею Адамара.

12.2. Функції Гаара

1. *Функції Гаара* $H_l^n(\theta)$ визначають для кожного значення $\theta \in [0;1)$ двома величинами: l — номером підрозділу в системі функцій Гаара та n — номером функції у відповідному підрозділі.

Перші вісім функцій Гаара подано на рис. 4.

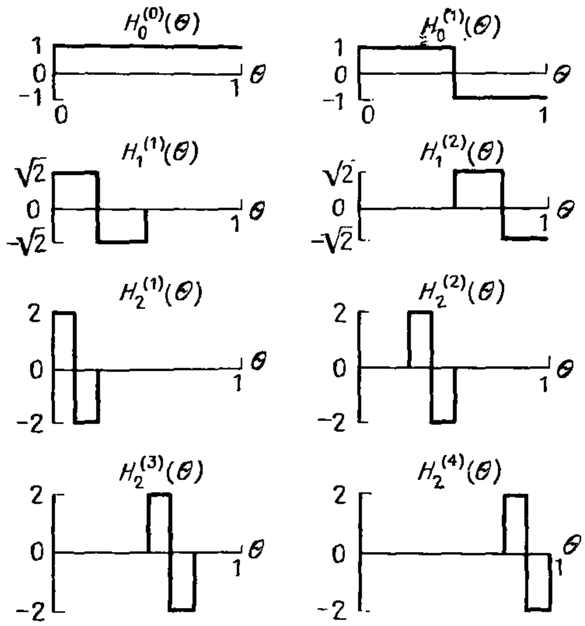

Рис. 4

Матриць дискретних значень функції Гаара така:

$$H^{*}(3)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Функції Гаара задають формулою:

$$H_l^{(n)}(\theta)=\begin{cases} 2^{l/2}, & \dfrac{n-1}{2^l}\le\theta<\dfrac{n-1/2}{2^l}, \\ -2^{l/2}, & \dfrac{n-1/2}{2^l}\le\theta<\dfrac{n}{2^l}, \\ 0, & \text{інакше}, \end{cases}$$

де $0\le l<\log_2 N, 1\le n\le 2^l$.

12.3. Перетворення Волша та Гаара

1. Для функцій $x(t)$, які задані на проміжку $t\in[0;T)$, формула розвинення в *ряд Волша* має вигляд:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X(n) wal\left(n, \frac{t}{T}\right),$$

де $wal\left(n, \frac{t}{T}\right)$ — n-та за порядком функція Волша, $X(n)$ — спектр (коефіцієнт) Волша:

$$X(n) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} x(t) wal\left(n, \frac{t}{T}\right) dt.$$

2. Обмежуючись N членами розвинення, дістають формулу *зрізаного ряду Волша*:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n) wal\left(n, \frac{t}{T}\right).$$

3. *Дискретне перетворення Волша* реалізують за допомогою дискретних функцій Волша. Кількість точок відліку беруть $N = 2^n, n \in \mathbb{N}$.

Формули дискретних перетворень Волша:

$$x(i) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) wal\left(k, \frac{i}{N}\right),$$

де

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x(i) wal\left(k, \frac{i}{N}\right),$$

$x(i)$ — ґратчастий сигнал, означений на інтервалі $[0, N)$; i — номер точки дискретного інтервалу означення.

4. k-й елемент дискретного перетворення Волша можна одержати, помноживши кожний дискретний елемент сигналу $x(i)$ на функцію Волша послідовності k і просумувавши за $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Зокрема,

$$\vec{X}(k) = \frac{1}{N} W_{ki} \vec{x}(i),$$

де $\vec{x}_i = \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \ldots \\ x(N-1) \end{pmatrix}$, W_{ki} — матриця перетворення Волша.

5. Приміром, знайдімо перетворення Волша послідовності даних $1, 2, 0, 3$. $N = 4$. Матриця

$$W_{ki} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\vec{X}(k) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4. Так само запроваджують і *дискретне перетворення Гаара*.