ЛЕКЦІЯ 1. МНОЖИНИ

Математичне поняття множини поступово виділилось зі звичних уявлень про сукупність, збірку, клас тощо. Мова теорії множин зараз є майже універсальною математичною мовою.

1.1. Множини

1. Поняття множини є одним з основних первісних понять, як точка, пряма чи площина у шкільній геометрії.

Під *множиною* розуміють сукупність об'єктів довільної природи, об'єднаних за певною ознакою. Об'єкти, які утворюють множину, називають *елементами* множини.

Припускають, що елементи (об'єкти) сукупності можна відрізнити один від одного та від об'єктів, які не входять до цієї сукупності.

Множини зазвичай позначають великими літерами латинки $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$, а їхні елементи — малими літерами $a, b, \ldots, x, y, \ldots$.

2. Приклади множин:

1) множина студентів в аудиторії (елементи — студенти);
2) множина десяткових цифр;
3) множина літер певної абетки тощо.

3. Поняття «належати» також є первісним у математиці. Якщо елемент x *належить* множині A (x *є елементом* множини A), то пишуть $x \in A$. Якщо елемент x *не належить* множині A (x *не є елементом* множини A), то пишуть $x \notin A$.

Приміром, якщо $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел, то

$$1 \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}.$$

Уважають, що множина не може бути своїм елементом, оскільки це може призводити до парадоксів.

4. Множину називають *скінченною*, якщо вона має скінченну кількість елементів. Множину, яка не є скінченною, називають *нескінченною*.

Приміром, множина студентів в аудиторії скінченна, а множина натуральних чисел — нескінченна.

5. Якщо лише елементи $a_1, a_2, \dots, a_n$ належать множині A, то це можна записати як

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

Такий самий запис використовують і тоді, коли множина елементів нескінченна, приміром:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

Якщо можна задати властивість $M(x)$, яка характеризує всі елементи множини A (*характеристичну властивість* множини), використовують запис

$$A = \{x \mid M(x)\},$$

що читають як «A є множиною елементів x, таких, що $M(x)$.»

6. Множину, що не має жодного елементу, називають *порожньою* множиною і позначають $\varnothing$. Порожню множину можна задати будь-якою неможливою умовою. Приміром,

$$\varnothing = \{x \mid x \neq x\}.$$

1.2. Дії над множинами

1. Означення 1.1 (рівності множин).

Множини A та B називають *рівними*, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів, і позначають

$$A = B.$$

Якщо $A = B$, то кожний елемент множини A належить множині B, і навпаки, кожний елемент множини B належить множині A.

У множині однакові елементи не розрізняють і порядок запису елементів множини не є істотним. Тобто,

$$\{a, a, b\} = \{a, b\} = \{b, a\}.$$

2. Означення 1.2 (підмножини).

Множину A називають *підмножиною* множини B (множина A *міститься* у множині B), якщо кожний елемент множини A є елементом множини B, і пишуть

$$A \subset B.$$

3. Поняття підмножини має властивості:

1) порожня множина є підмножиною будь-якої множини, $\varnothing \subset A$;

2) кожна множина є підмножиною самої себе, $A \subset A$;

3) якщо $A \subset B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$;

4) $A = B$ тоді й лише тоді, коли $A \subset B$ і $B \subset A$;

5) множина з n елементів має 2^n підмножин.

4. Приміром, підмножинами множини $X = \{a,b\}$ є:

$$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}.$$

Поняття елемента множини не є тотожним поняттю одноелементної підмножини. Так $a \in X$ та $\{a\} \subset X$; але $a \not\subset X$ та $\{a\} \notin X$.

Множину всіх підмножин множини X називають *булеаном* множини X і позначають 2^X.

5. У межах певного розділу математики (а інколи, у межах певної задачі) розглядають лише ті множини, що є підмножинами однієї й тієї самої множини, яку називають *універсальною* й позначають U.

Універсальна множина не може бути «як завгодно широкою» (приміром, «множиною всіх множин»), оскільки розгляд таких множин породжує парадокси — логічні суперечності.

Приміром, у планіметрії за універсальну множину беруть множину всіх точок площини. Тоді різноманітні фігури на площині є підмножинами такої універсальної множини.

6. Нехай множини A та B є підмножинами універсальної множини U.

Означення 1.3 (об'єднання* множин).

Об'єднанням множин A та B називають множину всіх елементів, які належать хоча б одній з цих множин, і позначають

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \lor x \in B\}.$$

* Використовують також термін «сума множин».

Означення 1.4 (перетину[**] множин).

Перетином множин A та B називають множину всіх елементів, які належать одночасно обом множинам, і позначають

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Означення 1.5 (різниці множин).

Різницею множин A та B називають множину всіх елементів множини A, які не належать множині B, і позначають

$$A \setminus B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Означення 1.6 (доповнення множини).

Доповненням множини A (до множини U) називають різницю множин U та A і позначають

$$\overline{A} = U \setminus A.$$

7. Множини і дії з множинами можна зображувати за допомогою *діаграм Ойлера — Вена*: множини зазвичай зображують кругами, а універсальну множину зображують прямокутником (рис. 1.1).

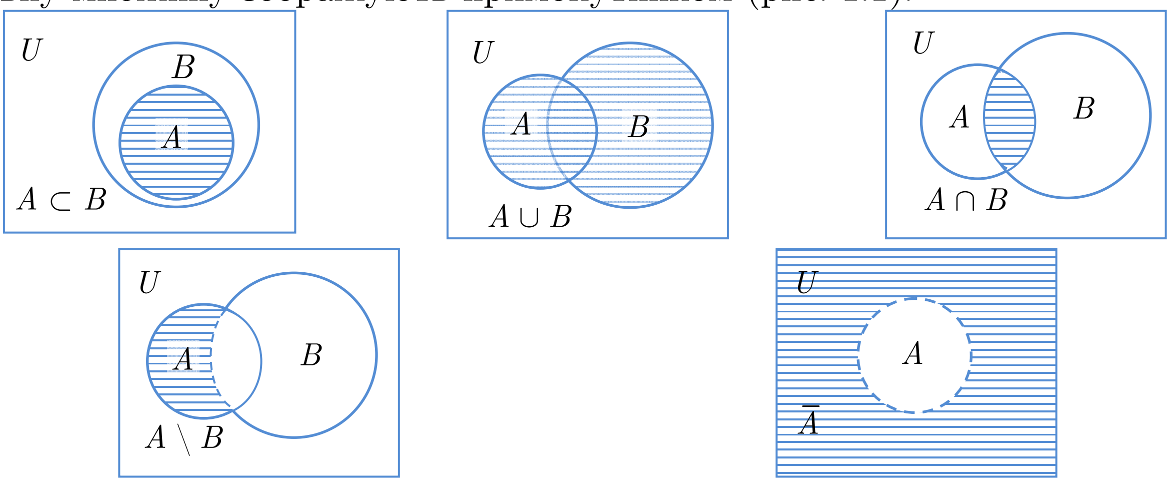


Рис. 1.1. Діаграми Ойлера — Вена для дій над множинами

8. Приміром, якщо $A = \{1,2,3\}, B = \{2,3,4,5\}$, то

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}, A \cap B = \{2,3\},$$

$$A \setminus B = \{1\}, B \setminus A = \{4,5\}.$$

[**] Використовують також терміни «переріз множин» та «добуток множин».

1.3. Властивості дій над множинами

1. Для будь-яких множин A, B, C, що є підмножинами універсальної множини U правдиві властивості:

1) $A \cup B = B \cup A$ (*комутативність об'єднання*);

2) $A \cap B = B \cap A$ (*комутативність перетину*);

3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (*асоціативність об'єднання*);

4) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (*асоціативність перетину*);

5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (*дистрибутивність об'єднання щодо перетину*);

6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (*дистрибутивність перетину щодо об'єднання*);

7) $A \cup A = A, A \cap A = A$ (*закони ідемпотентності*);

8) $A \cup \varnothing = A, A \cap \varnothing = \varnothing, A \setminus \varnothing = A, \overline{\varnothing} = U$ (*закони* $\varnothing$);

9) $A \cup U = U, A \cap U = A, U \setminus A = \overline{A}, \overline{U} = \varnothing$ (*закони* U);

10) $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$ (*закони поглинання*);

11) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (*закони де Моргана*);

12) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$ (*закон склеювання*);

13) $\overline{\overline{A}} = A$ (*закон подвійного поглинання*);

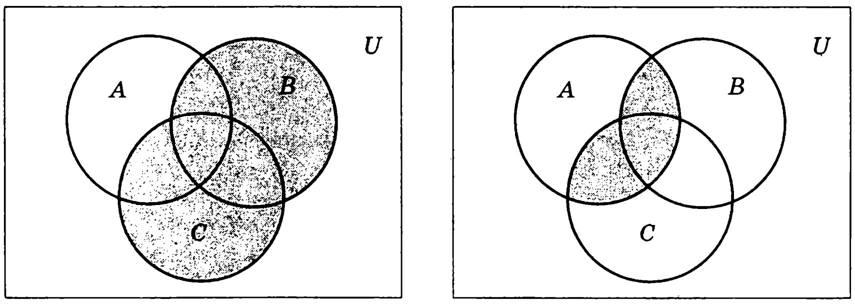
14) $A \cup \overline{A} = U$;

15) $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Такі самі властивості мають дії над висловлюванням, якщо замінити у співвідношеннях: U на 1, $\varnothing$ на 0, об'єднання на диз'юнкцію, перетин на кон'юнкцію, доповнення на заперечення.

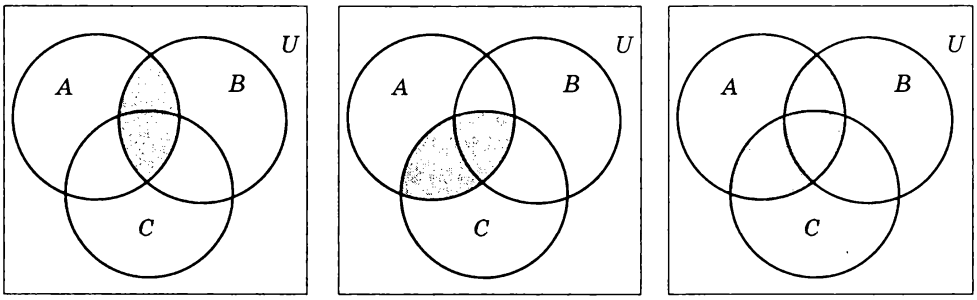
2. Доведення деяких співвідношень. 1. Доведімо за допомогою діаграм Ойлера — Вена (рис. 1.2 та рис. 1.3) дистрибутивність перетину щодо об'єднання:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$



$B \cup C$ $\qquad\qquad$ $A \cap (B \cup C)$

Рис. 1.2. Побудова діаграми для $A \cap (B \cup C)$



$(A \cap B)$ $(A \cap C)$ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Рис. 1.3. Побудова діаграми для $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

2. Спростімо вираз $X = \overline{(\bar{A} \cup B \cup C)} \cap (A \cap (B \cup \bar{C})) \cap \bar{B}$.

$\overline{(\bar{A} \cup B \cup C)} \cap (A \cap (B \cup \bar{C})) \cap \bar{B} =$	**(застосуємо закон де Моргана)**
$= (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cap (A \cap (B \cup \bar{C})) \cap \bar{B} =$	**(асоціативність і комутативність)**
$= A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap A \cap \bar{B} \cap (B \cup \bar{C})) =$	**(застосуємо закон ідемпотентності)**
$= A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap (B \cup \bar{C})) =$	**(застосуємо дистрибутивний закон)**
$= A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap B \cup A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{C} =$	**(згідно з властивостями порожньої множини)**
$= \varnothing \cup A \cap \bar{B} \cap \bar{C} = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}.$	

Отже, $X = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$.

1.4. Декартів добуток множин

1. Пару елементів

$$(x; y), x \in A, y \in B,$$

називають *упорядкованою*, якщо вказано порядок запису елементів x та y. При цьому вважають, що $(x_1; y_1) = (x_2; y_2)$ тоді й лише тоді, коли $x_1 = x_2, y_1 = y_2$.

Елементи x та y упорядкованої пари $(x; y)$ називають *координатами* цієї пари (x — перша координата, y — друга). Упорядковані пари записують за допомогою круглих дужок, на відміну від невпорядкованих пар, які записують за допомогою фігурних дужок.

2. Нехай A та B — довільні множини.

Означення 1.7 (декартового добутку множин).
Декартовим (*прямим*) *добутком* множин A та B називають множину, яка складається з усіляких упорядкованих пар x, y, де $x \in A, y \in B$, і позначають
$$A \times B = \{(x;y) \mid x \in A \wedge y \in B\}.$$

Якщо $A = B$, то $A \times A$ називають *декартовим квадратом* і позначають $A^2 = A \times A$.

3. Приміром, якщо $A = \{1,2,3\}, B = \{3,4\}$, то
$$A \times B = \{(1;3),(1;4),(2;3),(2;4),(3;3),(3;4)\},$$
$$B \times A = \{(3;1),(3;2),(3;3),(4;1),(4;2),(4;3)\}.$$
Порівнюючи $A \times B$ та $B \times A$, бачимо, що загалом $A \times B \neq B \times A$.

1.5. Аксіоматика теорії множин

1. *Аксіома об'ємності* — дві множини є рівними, якщо будь-який елемент, що міститься в першій множині, міститься і в другій, і навпаки.

2. *Аксіома порожньої множини* — існує порожня множина, що не містить жодного елемента.

3. *Аксіома нескінченності* — існує нескінченна множина, що має такі властивості:

1) ця множина містить порожню множину;

2) якщо ця множина містить деякий елемент b, то вона містить і елемент $\{b\}$.

Отже, така множина має вигляд:
$\{\varnothing, \varnothing \cup \{\varnothing\}, \varnothing \cup \{\varnothing\} \cup \{\varnothing \cup \{\varnothing\}\}, \ldots\}\{\varnothing, \varnothing \cup \{\varnothing\}, \varnothing \cup \{\varnothing\} \cup \{\varnothing \cup \{\varnothing\}\}, \ldots\}$

4. *Аксіома пари* — якщо існують дві множини a_1 та a_2, то існує множина кожен елемент якої дорівнює або a_1, або a_2.

5. *Аксіома булеана* — для будь-якої множини існує множина всіх її підмножин;

6. *Аксіома об'єднання* — для будь-якого набору(родини) множин, можна створити множину, кожен елемент якої належить принаймні до однієї з цих множин.

7. *Аксіомна схема виділення* — якщо є деяке математичне твердження, що може бути застосованим до будь-якого з елементів деякої множини, то можна виділити принаймні одну підмножину цієї множини, застосувавши це твердження.

8. *Аксіома підстановки* — якщо є функціональне відношення, що може бути застосована до кожного з елементів множини, то, застосувавши його, можна визначити нову (або ж таку саму) множину.

9. *Аксіома регулярності* — у будь-якій родині множин існує принаймні одна множина, кожен елемент якої не належить цій родині. Одним з наслідків цієї аксіоми є те, що жодна множина не є елементом самої себе.

10. *Аксіома вибору* — для будь-якого набору непорожніх, неперетинних множин можна побудувати множину, кожен елемент якої є елементом однієї і тільки однієї з множин цього набору.

1.6. Навчальні задачі

1.1. Задати множину:

1) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$ переліком її елементів;

2) $M = \{1,2,3\}$ характеристичною умовою.

Розв'язання.

1. Розв'язуючи рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$, маємо $x_1 = 1, x_2 = 3$. Отже,

$$M = \{1,3\}.$$

2. [*Один з можливих варіантів відповіді.*] $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 3\}$.

1.2. Записати всі підмножини множини $M = \{1,2,3\}$.

Розв'язання.

Порожня множина $\varnothing$ є підмножиною будь-якої множини.

Одноелементні підмножини множини M: $\{1\},\{2\},\{3\}$.

Двоелементні підмножини множини M: $\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$.

Триелементна множина $M = \{1,2,3\}$ є своєю підмножиною.

Множина M має $2^3 = 8$ підмножин:

$$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}.$$

1.3. Задано множини $A = \{1,2,3\}$ та $B = \{2,3,4,5\}$. Знайти множини $A \cup B$, $A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A \Delta B$. Зобразити діаграму Ойлера — Вена.

Розв'язання.

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}, \quad A \cap B = \{2,3\},$$
$$A \setminus B = \{1\}, \quad B \setminus A = \{4,5\},$$
$$A \Delta B = \{1,4,5\}.$$

Діаграму Ойлера — Вена зображено на рис. 1

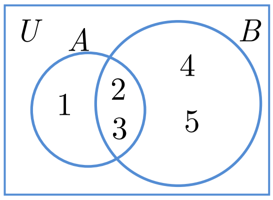


Рис. 1 до 1.3.

1.2.4. Задано множини $A = \{1,2\}$ та $B = \{2,3,4\}$. Знайти множини $A \times B$ та $B \times A$.

Розв'язання.

$$A \times B = \{(1;2),(1;3),(1;4),(2;2),(2;3),(2;4)\}.$$
$$B \times A = \{(2;1),(2;2),(3;1),(3;2),(4;1),(4;2)\}.$$