ЛЕКЦІЯ 2. ВІДНОШЕННЯ

2.1. Бінарні відношення

1. У математиці та її застосуваннях досить часто доводиться мати справу з тими чи іншими відношеннями між певними об'єктами.

n-арним відношенням R на множинах $X_1, X_2, \ldots, X_n$ називають підмножину декартового добутку цих множин:

$$R \subset X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n.$$

Якщо набір елементів $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ належить відношенню R, то кажуть, що елементи $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *перебувають у відношенні* R.

Якщо $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X$, то кажуть, що n-арне відношення R задано на множині X.

2. Якщо $n = 1$, то відношення називають *унарним*, якщо $n = 2$ — *бінарним*.

Якщо на множинах X та Y задано бінарне відношення R, то факт $(x; y) \in R$ часто записують як xRy, і кажуть, що елемент $x \in X$ *перебуває у відношенні* R з елементом $y \in Y$.

Запис $x\overline{R}y$ означає, що $x \in X$ *не перебуває у відношенні* R з елементом $y \in Y$, тобто $(x; y) \notin R$. Відношення $\overline{R}$ називають *відношенням доповнення* до R.

Множину $D(R) \subset X$ перших елементів упорядкованих пар, що утворюють R, називають *областю означення* бінарного відношення R, а множину $E(R) \subset Y$ других елементів пар — *областю значень* бінарного відношення R.

3. Приміром, запис $(x;y) \in \leq$ означає, що $x \leq y$; запис $(x;y) \in \perp$ означає, що $x \perp y$.

4. Переріз відношення. Фактор-множина. Розгляньмо відношення R від X до Y (тобто $R \subset X \times Y$) і $x \in X$. *Перерізом* $R[x]$ *відношення* R *за* x називають множину всіх таких елементів $y \in Y$, для яких $(x;y) \in R$. Отже,

$$R[x] = \{y \in Y \mid xRy\}, x \in X.$$

Об'єднання перерізів за елементами деякої підмножини Z множини X називають *перерізом* $R[Z]$ відношення R *щодо підмножини* Z. Множину, що складається з перерізів відношення $R \subset X \times Y$ за кожним елементом з X, називають *фактормножиною* множини Y за відношенням R і позначають

$$Y / R = \{R[x] \mid x \in X\}.$$

5. Приміром, якщо

$$R = \{(1;2),(2;1),(1;3),(2;3),(3;4)\},\ \ X = Y = \{1,2,3,4\},$$

то

$$R[1] = \{2,3\}, R[2] = \{1,3\}, R[3] = \{4\}, R[4] = \varnothing;$$
$$Y / R = \{R[1], R[2], R[3], R[4]\} = \{\{2,3\},\{1,3\},\{4\},\varnothing\}.$$

2.2. Способи задавання бінарних відношень

1. Будь-яке бінарне відношення $R \subset X \times Y$ можна задати:

1) *явно* списком з пар, з яких складається відношення:

$$\{(x_i;y_j) \mid x_i \in X, y_j \in Y, x_i R y_j\};$$

2) *матрицею суміжності* $W(R) = W_{m \times n}$, рядки якої відповідають елементам множини $X, m = n(X)$, стовпці — елементам множини $Y, m = n(Y)$, де

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_i R y_j, \\ 0, & \text{якщо } x_i \overline{R} y_j; \end{cases}$$

3) *стрілковою діаграмою*: елементи множин X та Y зображують точками площини; від елемента $x_i \in X$ проводять стрілку до елемента $y_j \in Y$, якщо $x_i R y_j$ (рис. 2.1);

Бінарне відношення R на множині X можна задати орієнтованим графом: точки множини X — вершини графа, якщо $x_i R x_j$, то точки x_i та x_j з'єднуємо стрілкою від x_i до x_j — дугою графа (якщо $x_i R x_i$, то петлею) (рис. 2.2);

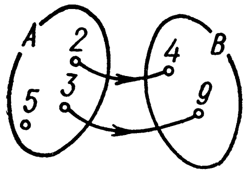

Рис. 2.1. Стрілкова діаграма

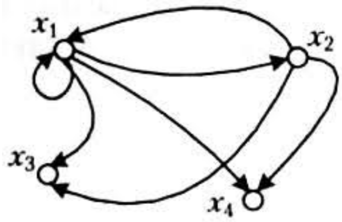

Рис. 2.2. Граф відношення

4) таблицею:

x_1	x_2	x_3	x_4	…
$R[x_1]$	$R[x_2]$	$R[x_3]$	$R[x_4]$	…

У першому рядку її записано елементи множини X, у другому — елементи множини Y / R;

5) графічно: якщо $X \subset \mathbb{R}, Y \subset \mathbb{R}$, то графік відношення (рис. 2.3)

$$\Gamma_R = \{(x_i; y_j) \mid x_i R y_j\};$$

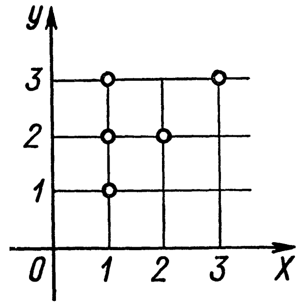

Рис. 2.3. Графік відношення

6) формулою:

$$R = \{(x; y) \mid F(x, y) = 0, x \in X, y \in Y\}.$$

2. Приміром, відношення

$$R = \{(1;1), (1;2), (2;1), (1;3), (2;3), (3;2)\}$$

можна задати матрицею суміжності

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

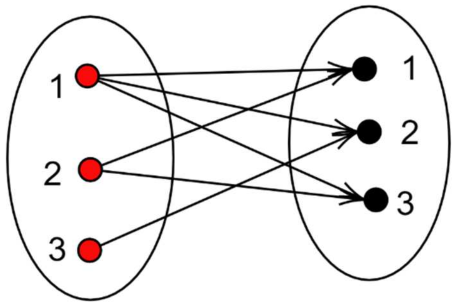

Рис. 2.4

стрілковою діаграмою (рис. 2.4);
орієнтованим графом (рис. 2.5);
таблицею

1	2	3
$\{1, 2, 3\}$	$\{1, 3\}$	$\{2\}$

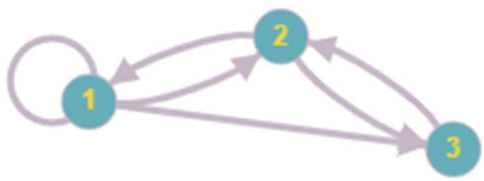

Рис. 2.5

3. Окремі типи відношень. Відношення $U = X \times X = X^2$ називають *універсальним* на множині X. Усі елементи матриці суміжності тотожного відношення дорівнюють 1.

Відношення $\varnothing$ називають *порожнім*. Матриця суміжності порожнього відношення є нульовою.

Відношення $I_X = \{(x;x) \mid x \in X\}$ називають *тотожним*. Матриця суміжності тотожного відношення є одиничною.

Приміром, якщо $X = \{1,2\}$, то

$$U = \{(1;1),(1;2),(2;1),(2;2)\}, \varnothing = \{\}, I_X = \{(1;1),(2;2)\};$$

$$W(U) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, W(\varnothing) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, W(I_X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.3. Операції над відношеннями

1. Операції з відношеннями як із множинами. Для відношень R та S можна розглянути: об'єднання $R \cup S$, перетин $R \cap S$, різницю $R \setminus S$.

Приміром,

$$(<) \cup (=) = (\leq);$$
$$(\leq) \cap (\geq) = (=);$$
$$(\leq) \setminus (=) = (<).$$

Якщо $R \subset S$, то відношення S називають *розширенням* відношення R, а R — *звуженням* відношення R.

Приміром, оскільки з $x < y$ випливає, що $x \leq y$, то $(<) \subset (\leq)$ і відношення $(\leq)$ є розширенням відношення $(<)$.

2. Композиція відношень. Нехай задано відношення $R \subset X \times Y$ та $S \subset Y \times Z$. *Композицією* відношень R та S називають відношення, що складається з упорядкованих пар $(x;z)$ таких, що $(x;y) \in R, (y;z) \in S$ і позначають

$$R \circ S = \{(x;z) \mid \exists y : xRy, ySz\}.$$

Приміром, якщо

$$R = \{(1;2),(2;3),(3;4)\}, S = \{(0;0),(1;1),(1;2)\},$$

то

$$R \circ S = \varnothing, \quad S \circ R = \{(1;2),(1;3)\}.$$

Отже, композиція відношень не є комутативною: у загальному випадку

$$R \circ S \neq S \circ R.$$

Композиція є асоціативною операцією: для будь-яких відношень S, T та R виконано співвідношення:

$$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T.$$

Нехай на множині X задано відношення R. n*-м степенем* відношення R називають відношення

$$R^n = \underbrace{R \circ \ldots \circ R}_{n \text{ разів}}.$$

3. Обернені відношення. Відношення

$$R^{-1} = \{(x;y) \mid (y;x) \in R\}$$

називають *оберненим* до відношення R.

Приміром, якщо $R = \{(1;2),(2;3),(3;4)\}, S = \{(0;0),(1;2),(2;2)\}$, то

$$R^{-1} = \{(2;1),(3;2),(4;3)\}, S^{-1} = \{(0;0),(1;1),(2;2)\}.$$

У конкретних випадках відношення R та R^{-1} пов'язані так:

R	$=$	$<$	$\geq$	$\parallel$	$\perp$
R^{-1}	$=$	$>$	$\leq$	$\parallel$	$\perp$

4. Правдиві **властивості відношень**:

1) якщо $R \subset A \times B$, то $R^{-1} \subset B \times A$;

2) $(R^{-1})^{-1} = R$;

3) якщо $R \subset S$, то $R^{-1} \subset S^{-1}$;

4) $\overline{R}^{-1} = \overline{R^{-1}}$;

5) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

Зауважмо, що в загальному випадку

$$R \circ R^{-1} \neq I.$$

2.4. Властивості відношень

1. Нехай $R \subset X^2$. Тоді відношення R називають:

1) *рефлексивним*, якщо $\forall x \in X : xRx$;

2) *антирефлексивним*, якщо $\forall x \in X : x\overline{R}x$;

3) *симетричним*, якщо $\forall x, y \in X \;\; xRy \Rightarrow yRx$;

4) *антисиметричним*, якщо $\forall x, y \in X \;\; xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$;

5) *асиметричним*, якщо $\forall x, y \in X \;\; xRy \Rightarrow y\overline{R}x$;

6) *транзитивним*, якщо $\forall x, y, z \in X \;\; xRy, yRz \Rightarrow xRz$;

7) *антитранзитивним*, якщо $\forall x, y, z \in X \;\; xRy, yRz \Rightarrow x\overline{R}z$;

8) *повним*, якщо $\forall x, y \in X \;\; x = y \vee xRy \vee yRx$.

Теорема 2.1.

Нехай $R \subset X^2$ — відношення на X. Тоді:
1) R рефлексивне тоді й лише тоді, коли $I \subset R$;
2) R симетричне тоді й лише тоді, коли $R = R^{-1}$;
3) R транзитивне тоді й лише тоді, коли $R \circ R \subset R$;
4) R антисиметричне тоді й лише тоді, коли $R \cap R^{-1} = I$;
5) R антирефлексивне тоді й лише тоді, коли $R \cap I = \varnothing$;
6) R повне тоді й лише тоді, коли $R \cup I \cup R^{-1} = U$.

2. Приклади.

1) рефлексивні відношення: універсальне U, порожнє $\varnothing$, рівності $(=)$, менше або рівне $(\leq)$, паралельності $(\|)$;

2) антирефлексивні відношення: порожнє $\varnothing$, нерівності $(\neq)$, перпендикулярності $(\perp)$;

3) симетричні відношення: $U, I_X, =, \|, \perp$;

4) антисиметричні відношення: $\varnothing, \leq, <, \subset, I_X$;

5) асиметричні відношення є одночасно антисиметричними та антирефлексивними;

6) транзитивні відношення: $I_X, U, <, \leq, \equiv, \subset, \|$;

7) антитранзитивне відношення: $\neq, \perp$.

2.5. Відношення еквівалентності

1. Бінарне відношення $R \subset X^2$ називають відношенням *еквівалентності* у множині X, якщо воно:

1) рефлексивне;
2) симетричне;
3) транзитивне.

2. Приклади відношення еквівалентності: $=, \equiv, \|, I_X, U = X^2, \varnothing$, рівність чисел за модулем m $(x \equiv y \pmod m)$, тобто

$$R = \{(x;y) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, x - y \,\vdots\, m\},$$
$$R = \{(1;1),(1;2),(2;1),(2;2)\}.$$

3. Класи еквівалентності. Нехай R є відношенням еквівалентності у множині X. Переріз $R[x]$ відношення R за елементом x називають *класом еквівалентності* за відношенням R і позначають

$$[x] = R[x] = \{y \mid (x;y) \in R\}.$$

4. Нехай R відношення рівності у множині $\mathbb{N}$ за модулем 3, тобто

$$R = \{(x;y) \mid x - y \,\vdots\, 3,\ x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Тоді:

$$[0] = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 0 \,\vdots\, 3\} = \{3, 6, 9, \ldots\},$$
$$[1] = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 1 \,\vdots\, 3\} = \{1, 4, 7, 10, \ldots\},$$
$$[2] = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 2 \,\vdots\, 3\} = \{2, 5, 8, 11, \ldots\},$$
$$[3] = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 3 \,\vdots\, 3\} = \{3, 6, 9, \ldots\}.$$

Отже, $[0] = [3]$.

Отже, усього є 3 різні класи еквівалентності, причому

$$\mathbb{N} = [0] \cup [1] \cup [2] = \bigcup_{k=0}^{2} [k].$$

Теорема 2.2.

Довільні два класи еквівалентності R або не мають спільних елементів, або збігаються.

Теорема 2.3.

Довільну множину, у якій задано відношення еквівалентності R, можна подати об'єднанням різних класів еквівалентності за відношенням R.

Якщо $R \subset X^2$ є відношенням еквівалентності у множині X, то фактормножиною множини X за відношенням R є

$$X \,/\, R = \{[x] \mid x \in X\}.$$

5. Відношення толерантності. Відношення R називають відношенням *толерантності*, якщо воно:

1) рефлексивне;
2) симетричне;
3) антитранзитивне.

Толерантність формалізує інтуїтивне поняття схожості. Схожість двох об'єктів не залежить від того, у якому порядку об'єкти порівнюють. Але, якщо один об'єкт схожий із другим, а другий схожий із третім, то це не означає, що перший і третій об'єкти схожі.

2.6. Відношення порядку

1. Відношення R називають відношенням *порядку* (*часткового порядку*), якщо воно:

1) антисиметричне;

2) транзитивне.

Позначають $\prec$.

Рефлексивне відношення порядку називають відношенням *нестрогого порядку* (позначають $\leq$).

Антирефлексивне відношення порядку називають відношенням *строгого порядку* (позначають $<$).

Повне відношення порядку називають відношенням *повного* (*лінійного*) *порядку*.

Множину, на якій задано відношення порядку R, називають *упорядкованою відношенням* R (*упорядкованою*). Множину, на якій задано відношення часткового порядку називають *частково впорядкованою*. Множину, на якій задано відношення повного (лінійного) порядку, називають *лінійно впорядкованою*. Будь-які елементи лінійно впорядкованої множини можна порівняти (порівнянні).

Теорема 2.4.

Якщо R є відношенням строго (нестрогого) порядку, то R^{-1} також є відношенням строгого (нестрогого) порядку.

2. Упорядковані відношенням нестрогого порядку множини можна зображувати *діаграмою Гассе*. Кожний елемент $x \in X$ позначають точкою, і будь-яку пару точок, що відповідають елементам $x \in X$ та $y \in X$, з'єднують стрілкою, що йде вгору з точки x у точку y, тоді й лише тоді, коли $x \leq y$, і не існує $z \in X$ такого, що $x < z < y$.

3. Прикладом відношення часткового нестрогого порядку є відношення включення множин. Приміром, діаграму Гассе для відношення включення у множині $X = \{x, y\}$, подано на рис. 2.6.

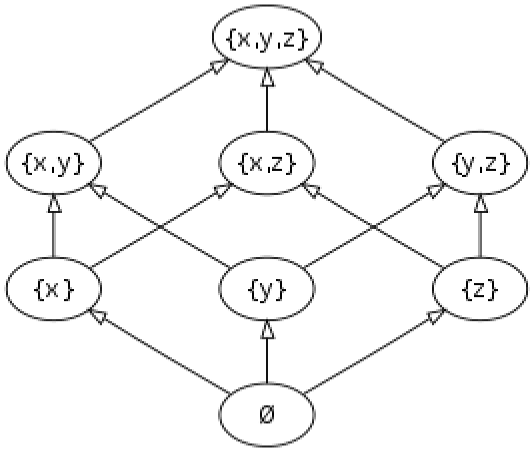

Рис. 2.6. Діаграма Гассе

4. Відношення

$$R = \{(1;2),(2;2),(2;3),(1;3),(4;3)\}$$

антисиметричне і транзитивне. Отже, R є відношенням порядку у множині $X = \{1,2,3,4\}$, упорядкованій цим відношенням.

$$1 \leq 2,\ 2 \leq 2,\ 2 \leq 3,\ 1 \leq 3,\ 4 \leq 3.$$

Це відношення не є ні рефлексивним, ні антирефлексивним.

5. Найменший та найбільший елементи впорядкованої множини. Елемент x упорядкованої множини X називають *найменшим* елементом цієї множини, якщо

$$\forall y \in X : x \leq y,$$

і позначають (якщо він існує) $\min X$.

Елемент x упорядкованої множини X називають *найбільшим* елементом цієї множини, якщо

$$\forall y \in X : y \leq x,$$

і позначають (якщо він існує) $\max X$.

З означення випливає, що у строго впорядкованій множині не існує найменшого та найбільшого елементів.

6. Мінімальний та максимальний елементи множини. Елемент x множини X з відношенням порядку $\prec$ називають *мінімальним*, якщо не існує менших елементів:

$$\nexists y \in X : y \prec x \wedge y \neq x.$$

Елемент x множини X з відношенням порядку $\prec$ називають *максимальним*, якщо не існує більших елементів:

$$\nexists y \in X : x \prec y \wedge y \neq x.$$

Теорема 2.6.

У будь-якій скінченній частково впорядкованій множині існують мінімальний та максимальний елементи.

Будь-який найменший (найбільший) елемент є також мінімальним (максимальним), але мінімальний (максимальний) елемент x може й не бути найменшим (найбільшим), якщо існують елементи y, які непорівнюванні з x.

Лінійно упорядкована множина містить єдиний мінімальний та єдиний максимальний елементи, а в частково впорядкованій множині таких елементів може бути декілька.

Лінійно впорядковану множину називають *цілком упорядкованою*, якщо кожна її непорожня підмножина має найменший (найбільший) елемент.

Прикладом цілком упорядкованої множини є множина натуральних чисел $\mathbb{N}$. Прикладом лінійно впорядкованої, але не цілком упорядкованої множини є множина $\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \geq 0\}$, оскільки множина $(1;+\infty) \subset \mathbb{R}_+$ не має найменшого елемента.

7. Антирефлексивне антисиметричне відношення називають відношенням *домінування*.

Кажуть, що x домінує над y, якщо x у якомусь сенсі краще за y.

Окремим випадком відношення домінування є відношення строгого порядку.