

# ЛЕКЦІЯ 3. ФУНКЦІОНАЛЬНІ ВІДНОШЕННЯ. ПОТУЖНІСТЬ МНОЖИН

- 3.1. Функціональні відношення
- 3.2. Класифікація функціональних відношень
- 3.3 Потужність множин

## 3.1. Функціональні відношення

1. Бінарне відношення  $R \subset X \times Y$  називають *функціональним*, з  $xRy$  та  $xRz$  випливає, що  $y = z$ .

Отже, функціональне відношення не може містити різні упорядковані пари з однаковим першим елементом.

Приміром, відношення  $R_1 = \{(1;2), (2;3), (3;4)\}$  є функціональним, а є відношення  $R_2 = \{(1;1), (1;2), (2;3)\}$  не є функціональним.

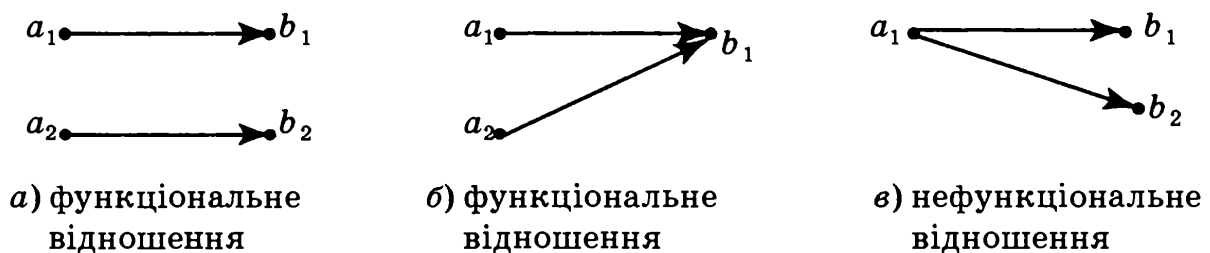


Рис. 3.1. Приклади відношень

Якщо відношення  $R \subset X \times Y$  є функціональним, то довільний елемент  $x \in X$  може перебувати у відношенні  $R$  лише з одним елементом  $y \in Y$ . Це означає, що переріз  $R[x]$  відношення  $R$  за довільним елементом  $x \in X$  є порожньою, або одноелементною множиною.

Так, для відношення  $R_1$  маємо:

$$R[1] = \{2\}, R[2] = \{3\}, R[3] = \{4\};$$
$$Y / R = \{\{2\}, \{3\}, \{4\}\}.$$

2. Відображення та функції. Якщо  $D(R) = X$ , то функціональне відображення  $R \subset X \times Y$  називають *відображенням* або *функцією* (*відображенням* множини  $X$  у множину  $Y$ , і пишуть:

$$R : X \rightarrow Y \quad (X \xrightarrow{R} Y).$$

Нехай  $R$  — відображення множини  $X$  у множину  $Y$  та  $x$  — довільний фіксований елемент множини  $X$ . Тоді множина  $R[x]$  непорожня, от-

же, у множині  $Y$  існує єдиний елемент  $y$  такий, що  $(x; y) \in R$ . Тому,  $R[x] = \{y\}$ . Для відображень цю рівність записують ще так

$$R[x] = y \quad (R : x \mapsto y, x \mapsto y).$$

Якщо  $R[x] = y$ , то елемент  $y$  називають *образом* елемента  $x$  при відображенні  $R$ , а елемент  $x$  — *прообразом* елемента  $y$  при відображенні  $R$  (елементу  $x$  відповідає елемент  $y$ ).

**3. Образ та прообраз множини.** Нехай  $R : X \rightarrow Y$  — відображення множини  $X$  у множину  $Y$ . *Образом* множини  $X_1 \subset X$  при відображенні  $R$  називають сукупність усіх образів елементів множини  $X_1$  при відображенні  $R$  і позначають

$$R(X_1) = \{y \mid y = R[x], x \in X_1\}.$$

*Прообразом* множини  $Y_1 \subset Y$  називають сукупність усіх прообразів елементів множини  $Y_1$  при відображенні  $Y$  і позначають

$$R^{-1}(Y_1) = \{x \mid R[x] = y, y \in Y_1\}.$$

З означення випливає, що  $R(X_1) \subset D(R), R(X) = D(R)$ .

Правдиві **співвідношення**:

- 1)  $R(X_1 \cup X_2) = R(X_1) \cup R(X_2), (X_1, X_2 \subset D(R))$ ;
- 2)  $R(X_1 \cap X_2) \subset R(X_1) \cap R(X_2)$ ;
- 3)  $R(X_1) \setminus R(X_2) \subset R(X_1 \setminus X_2)$ ;
- 4)  $R^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = R^{-1}(Y_1) \cup R^{-1}(Y_2) \quad (Y_1, Y_2 \subset Y)$ ;
- 5)  $R^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = R^{-1}(Y_1) \cap R^{-1}(Y_2)$ ;
- 6)  $R^{-1}(Y_1 \setminus Y_2) = R^{-1}(Y_1) \setminus R^{-1}(Y_2)$ .

## 3.2. Класифікація відображень

1. Відображення  $R : X \rightarrow Y$  називають:

1) *сюр'ективним* (*відображенням* множини  $X$  *на* множину  $Y$ ), якщо  $R(X) = Y$ ;

2) *ін'єктивним* (взаємно однозначним відображенням множини  $X$  у множину  $Y$ ), якщо з нерівності  $x_1 \neq x_2$  випливає нерівність  $R[x_1] \neq R[x_2]$ ;

3) **бієктивним** (взаємно однозначним відображенням множини  $X$  на множину  $Y$ ), якщо воно одночасно сюр'єктивне та ін'єктивне.

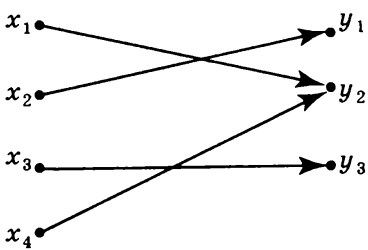


Рис. 3.2. Сюр'єктивне відображення

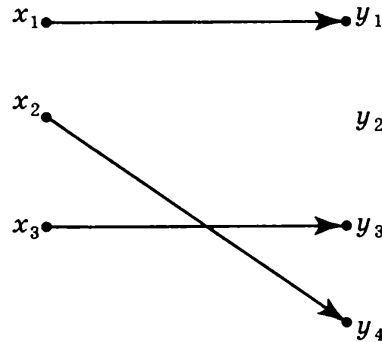


Рис. 3.3. Ін'єктивне відображення

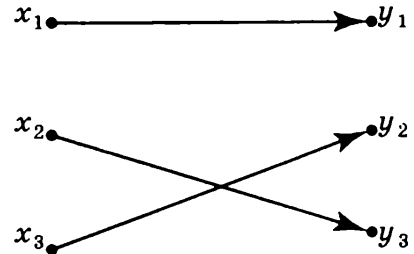


Рис. 3.4. Бієктивне відображення

2. Якщо відображення  $R : X \rightarrow Y$  є сюр'єктивним, то для будь-якого елемента  $y \in Y$  існує принаймні один прообраз  $x$  у множині  $X$  (у загальному випадку може бути декілька).

Якщо відображення  $R : X \rightarrow Y$  є ін'єктивним, то для довільного елемента  $y \in Y$  може існувати лише один прообраз у множині  $X$ .

Якщо відображення  $R : X \rightarrow Y$  є бієктивним, то для будь-якого елемента  $y \in Y$  існує і до того єдиний прообраз  $x \in X$ .

Якщо  $R$  є відображенням, то обернене відношення  $R^{-1}$  не обов'язково є функціональним, тобто не для всіх відображень (функцій) існують обернені.

### Теорема 3.1.

Якщо  $R$  — бієктивне відображення множини  $X$  на множину  $Y$ , то  $R^{-1}$  є також бієктивним відображенням множини  $Y$  на множину  $X$ .

**3. Композиція відображень.** Виявляється, що композиція  $R \circ S$  відображень  $R$  та  $S$  також є відображенням.

Якщо  $R$  та  $S$  — відображення, такі, що  $E(R) \subset D(S)$ , то область означення композиції  $D(R \circ S) = D(R)$ .

Композиція бієктивних відображень є бієктивним відображенням.

Зауважмо, що якщо  $R \circ S$  бієктивне відображення, то це не означає, що  $R$  та  $S$  є бієктивними відображеннями. Відношення  $R$  та  $S$  можуть навіть не бути відображеннями.

## 3.2. Потужність множин

**1. Еквівалентні множини.** Дві множини  $A$  та  $B$  називають *рівнопотужними* (еквівалентними), якщо існує хоча б одне взаємно однозначне відображення однієї множини на іншу і позначають  $A \sim B$ .

Зрозуміло, що якщо  $A = B$ , то  $A \sim B$ . Однак обернене твердження неправильне: рівнопотужні множини можуть і не бути рівними. Приміром, якщо  $A = \{1, 2, 3\}$  та  $B = \{1, 4, 9\}$ , то  $A \sim B$ , але  $A \neq B$ .

### Лема 3.2 (Кантора — Бернштейна).

Якщо  $X_2 \subset X_1 \subset X$  і  $X \sim X_2$ , то  $X \sim X_1$ .

### Теорема 3.3 (Кантора — Бернштейна).

Якщо  $X \sim Y_1$ , де  $Y_1 \subset Y$ , а  $Y \sim X_1$ , де  $X_1 \subset X$ , то  $X \sim Y$ , тобто якщо множина  $X$  еквівалентна деякій підмножині множини  $Y$ , а множина  $Y$  еквівалентна деякій підмножині множини  $X$ , то множини  $X$  та  $Y$  рівнопотужні.

### Теорема 3.4.

Довільна множина  $X$  не рівнопотужна зі своїм булеаном  $2^X$ .

**2. Рівнопотужність множин** має для будь-яких множин  $A, B$  та  $C$  такі властивості:

- 1)  $A \sim A$  (рефлексивність);
- 2) якщо  $A \sim B$ , то  $B \sim A$  (симетричність);
- 3) якщо  $A \sim B, B \sim C$ , то  $A \sim C$  (транзитивність).

**3. Потужність множини.** Множину  $X$  називають скінченною, якщо вона рівнопотужна множині  $\{1, 2, \dots, n\}$ , тобто її елементи можна занумерувати різними натуральними числами, яке не перевищують деякого натурального числа.

Під *потужністю* скінченної множини розуміють кількість її елементів  $n(X) = n$ . Потужність порожньої множини  $\emptyset$  дорівнює  $n(\emptyset) = 0$ .

Прикладами скінченної множини є зокрема  $\emptyset, X = 2^\emptyset, Y = 2^X, \dots$

Множину  $X$  називають *нескінченною*, якщо вона рівнопотужна деякій своїй підмножині  $X_1 \neq X$ .

Будь-яку множину, еквівалентну множині натуральних чисел, називають *зліченною*. Якщо множина злічена, то її елементи можна занумерувати.

**Теорема 3.5.**

1. Нехай  $A$  та  $B$  є неперетинними скінченними множинами. Тоді множина  $A \cup B$  скінченна і  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ .
2. Нехай  $A$  та  $B$  є неперетинними зліченими множинами. Тоді  $A \cup B$  є зліченною множиною.
3. Будь-яка підмножина зліченної множини або зліченна, або скінченна.
4. Об'єднання скінченної або зліченної кількості злічених множин є зліченною множиною.
5. Будь-яка нескінченна множина містить зліченну підмножину.

4. Існує два способи встановлення рівнопотужності двох скінченних множин:

1) установити безпосередньо взаємно однозначну відповідність між їхніми елементами;

2) перерахувати елементи множин і порівняти кількість елементів у кожній з них.

Для нескінченних множин другий спосіб неможливий.

5. Приміром, нехай  $\mathbb{N}$  — множина натуральних чисел,  $A$  — множина парних натуральних чисел. Установімо між ними взаємно однозначну відповідність за допомогою співвідношення  $n \leftrightarrow 2n$ , тобто

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & \dots, & n, & \dots & & \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & & \\ 2, & 4, & \dots, & 2n, & \dots & & \end{array}$$

Отже, множина натуральних чисел рівнопотужна власній підмножині парних натуральних чисел.

6. Оскільки множину  $\mathbb{Z}$  можна перерахувати за правилом:

$$0 = z_1, 1 = z_2, -1 = z_3, 2 = z_4, -2 = z_5, \dots,$$

то множина  $\mathbb{Z}$  зліченна.

7. Доведімо зліченність множини раціональних чисел  $\mathbb{Q}$ . Занумеруємо спершу додатні раціональні числа вигляду  $\frac{m}{n}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ .

$n \backslash m$	1	2	3	4	...
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	...
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	...
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	...
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	...
...	...	...	...	...	...

Рис. 3.5. Таблиця множини  $\mathbb{Q}_+$ 

Занумеруємо стовпці та рядки нескінченної таблиці індексами  $m$  та  $n$  відповідно.

Нумеруватимемо послідовно числа  $\frac{m}{n}$  уздовж стрілок на рис. 3.5, починаючи з лівого верхнього кута таблиці і переходячи після проходження кожної стрілки до сусідньої, довшої. При цьому пропускають відношення  $\frac{m}{n}$ , які вже були вписано раніше:

$$q_1^+ = 1 = \frac{1}{1}, q_2^+ = \frac{1}{2}, q_3^+ = 2 = \frac{2}{1}, q_4^+ = \frac{1}{3},$$

$$q_5^+ = 3 = \frac{3}{1}, q_6^+ = \frac{1}{4}, q_7^+ = \frac{2}{3}, q_8^+ = \frac{3}{2}, q_9^+ = 4 = \frac{4}{1}, \dots$$

Отже, множина  $\mathbb{Q}_+ = \{q_n^+\}, n \in \mathbb{N}$ , — зліченна. Далі сформуємо множину  $q_0 = 0, q_1 = q_1^+, q_2 = -q_1^+, q_3 = q_2^+, q_4 = -q_2^+, \dots$

Так само, можна довести, що множини  $\mathbb{N}^k, k \in \mathbb{N}$ , зліченні.

**8.** Існують нескінченні незліченні множини. Доведемо, що множина  $X = (0;1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$  не є зліченим від супротивного (діагональний метод Кантора). Нехай множину  $X$  можна записати у вигляді  $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}, a_i = 0, a_{i1}a_{i2}a_{i3}\dots$  — десятковий запис числа  $a_i$  (домовимось, що без 0 у періоді). Тоді маємо таблицю:

$$a_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}\dots,$$

$$a_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}\dots,$$

$$a_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33}\dots,$$

.....

Означмо елемент  $b = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$ , таким чином:  $b_i = 0$ , якщо  $a_{ii} \neq 0$  і  $b_i = 1$ , якщо  $a_{ii} = 0$ . Число  $b \notin \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ , оскільки для кожного  $m$  число  $b \neq a_m$ . Справді,  $b_m \neq a_{mm}$ , тому  $b$  та  $a_m$  відрізняються в  $m$ -й цифрі. Але  $b \in X$ . Отже, припущення про зліченність  $X$  є хибним, і множина  $X$  є незліченною.

Потужність множини  $(0;1)$  і рівнопотужних їй (множин  $[0;1], [a;b], \mathbb{R}$ ) називають *континуумом* і позначають  $c$ . Множину потужності  $c$  називають *континуальною*.