ЛЕКЦІЯ 4. АЛГЕБРА ЛОГІКИ

Характерними рисами математики є її логічність, послідовність, доказовість і широке використання символіки, яке дозволяє записувати математичні факти стисліше та точніше.

Логіка вивчає закони і способи правильного мислення. Математична логіка — є частиною логіки, яку застосовують до аналізу основ математики та математичних доведень.

4.1. Висловлювання

1. Поняття висловлювання є первісним, неозначуваним. Під *висловлюванням* розуміють твердження, про яке можна сказати, істинне воно чи хибне. Одночасно істинним і хибним висловлювання бути не може.

Приміром, висловлювання «Київ — столиця України» — істинне, а висловлювання «$6 < 2$» — хибне.

2. Висловлювання може бути утворено за допомогою слів або якихнебудь знаків (символів). Не будь-яке речення, не будь-який набір символів, навіть, якщо вони мають сенс, є висловлюванням. Приміром, твердження «студент технічного університету», «$x > 0$», не є висловлюванням, оскільки про нього не можна сказати істинне воно чи хибне.

Не є висловлюваннями також означення, заклики чи питання.

3. У математичній логіці абстрагуються від змісту висловлювань і визначають лише істинність чи хибність висловлювання. Висловлювання позначають зазвичай маленькими літерами латинки p, q, r тощо.

Нехай S — сукупність усіх висловлювань, T — сукупність (клас) усіх істинних висловлювань та F — сукупність (клас) усіх хибних висловлювань.

Тоді,

$$S = T \cup F, T \cap F = \varnothing.$$

Останню рівність означає, що не існує висловлювання, яке б було одночасно істинним і хибним.

Висловлювання p та q називають рівносильними, якщо вони належать до одного й того самого класу висловлювань і позначають $p \equiv q$.

Відношення рівносильності висловлювань є відношенням еквівалентності, а класи висловлювань T та F — класами еквівалентності.

Позначмо деяке фіксоване висловлювання з класу T через 1, а з класу F через 0.

Тоді $T = [1], F = [0]$, і запис $p \equiv 1$ означає, що висловлювання p істинне, а запис $p \equiv 0$, що висловлювання p — хибне.

4. Виходячи із простих висловлювань, за допомогою логічних дій можна одержати нові складені висловлювання.

Над висловлюваннями p та q означують такі дії:

— *заперечення* $\overline{p}$ (читають «не p»);

— *диз'юнкцію* $p \vee q$ (читають «p диз'юнкція q» або «p або q» і розуміють під цим «або p, або q, або p і q»);

— *кон'юнкцію* $p \wedge q$ (читають «p кон'юнкція q» або «p і q»);

— *імплікацію* $p \Rightarrow q$ (читають «з p випливає q», «якщо p, то q»), висловлювання p називають *умовою* імплікації, а q — *висновком*;

— *еквіваленцію* $p \Leftrightarrow q$ (читають «p тоді й лише тоді, коли q»);

— строгу (виключну) диз'юнкцію $p \oplus q$ (читають «або p, або q»);

— стрілку Пірса $p \downarrow q$ та штрих Шефера $p \mid q$.

Для позначення заперечення використовують також знак $\neg$.

Дії над висловлюваннями можна задати такою *таблицею істинності*:

p	q	$\overline{p}$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$p \oplus q$	$p \downarrow q$	$p \mid q$
0	0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0	0	0

5. Приміром, розгляньмо логічні дії з хибним висловлюванням $p =$ «$2 \times 2 = 5$» та правдивим висловлюванням $q =$ «5 — просте число».

$\overline{p} =$ «$2 \times 2 \neq 5$» $= 1$; $\overline{q} =$ «5 — складене число» $\equiv 0$;

$p \vee q =$ «$2 \times 2 = 5$ або 5 — просте число» $\equiv 0 \vee 1 \equiv 1$;

$p \wedge q =$ «$2 \times 2 = 5$ і 5 — просте число» $\equiv 0 \wedge 1 \equiv 0$;

$p \Rightarrow q =$ «якщо $2 \times 2 = 5$, то 5 — просте число» $\equiv 0 \Rightarrow 1 \equiv 1$;

$q \Rightarrow p =$ «якщо 5 — просте число, то $2 \times 2 = 5$» $\equiv 1 \Rightarrow 0 \equiv 0$;

$p \Leftrightarrow q =$ «$2 \times 2 = 5$ тоді й лише тоді, коли 5 — просте число» $\equiv 0 \Leftrightarrow 1 \equiv 0$;

$p \oplus q =$ «або $2 \times 2 = 5$, або 5 — просте число» $= 0 \oplus 1 \equiv 1$.

4.2. Властивості операцій над висловлюваннями

1. Для будь-яких висловлювань p, q, r, що є підмножинами універсальної множини U правдиві властивості операцій:

1) (*закон подвійного заперечення*) $\overline{\overline{p}} = p$;

2) (*властивості* 0 *та* 1):

$$p \vee 0 \equiv p, \;\; p \vee 1 \equiv 1;$$

$$p \wedge 0 \equiv 0, p \wedge 1 \equiv p;$$

$$p \Rightarrow 0 \equiv \overline{p}, \;\; 0 \Rightarrow p \equiv 1, \;\; p \Rightarrow 1 \equiv 1, \;\; 1 \Rightarrow p \equiv p;$$

$$p \Leftrightarrow 0 \equiv 0 \Leftrightarrow p \equiv \overline{p}, \;\; p \Leftrightarrow 1 \equiv 1 \Leftrightarrow p \equiv p;$$

$$p \oplus 0 \equiv p, \;\; p \oplus 1 = \overline{p};$$

3) (*закон суперечності*) $p \wedge \overline{p} \equiv 0$;

4) (*закон виключення третього*) $p \vee \overline{p} \equiv 1$;

5) (*закон ідемпотентності*)

$$p \vee p \equiv p, \;\; p \wedge p \equiv p;$$

6) (*комутативність*)

$$p \vee q \equiv q \vee p, \;\; p \wedge q \equiv q \wedge p, \;\; p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p,$$

$$p \oplus q \equiv q \oplus p, \;\; p \downarrow q \equiv q \downarrow p, \;\; p \mid q \equiv q \mid p;$$

7) (*асоціативність*)

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r, \;\; p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r,$$

$$p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r) \equiv (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r;$$

8) (*дистрибутивність диз'юнкція щодо кон'юнкції та кон'юнкції щодо диз'юнкції*)

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r), \;\; p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;

9) (*закони де Моргана*)

$\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}, \;\; \overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$;

10) (*закони поглинання*)

$p \vee (p \wedge q) \equiv p, \;\; p \wedge (p \vee q) \equiv p$;

11) (*закони склеювання*)

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \overline{q}) \equiv p, \; (p \vee q) \wedge (p \vee q) \equiv p;$$

12) (*закон контрапозиції*)

$$p \Rightarrow q \equiv \overline{q} \Rightarrow \overline{p};$$

13) $p \Leftrightarrow q \equiv \overline{p} \Leftrightarrow \overline{q}$.

2. Зв'язок між операціями.

1) $p \Rightarrow q \equiv \overline{p} \vee q$;

2) $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$;

3) $p \oplus q \equiv \overline{p \Leftrightarrow q} \equiv (p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q)$;

4) $p \downarrow q \equiv \overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$;

5) $p \mid q \equiv \overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$;

6) $\overline{p} \equiv p \oplus 1, p \vee q \equiv (p \oplus q) \oplus (p \wedge q)$;

7) $\overline{p} \equiv p \downarrow p, p \vee q \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q), p \wedge q \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$;

8) $\overline{p} \equiv p \mid p, p \vee q \equiv (p \mid p) \mid (q \mid q), p \wedge q \equiv (p \mid q) \mid (p \mid q)$.

Усі ці властивості та співвідношення можна довести за допомогою відповідних таблиць істинності.

4.3. Логічні формули

1. Поняття формули. У множині висловлювань S було визначено: унарну (над одним висловлюванням) логічну операцію f $(f(p) = \overline{p})$ та бінарні (над двома висловлюваннями) логічні операції $\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \oplus, \downarrow, \mid$. Застосовуючи згадані операції до довільних елементів множини S (і в довільному порядку), дістаємо певні елементи множини S— складені висловлюванні.

Такі висловлювання називають *логічними* (*пропозиційними*) *формулами*. Позначають формули так само як і значення функцій кількох змінних: $f(p, q, r, \ldots)$ або великими літерами $P, Q, R, \ldots$. Окреме висловлювання теж називають формулою.

Таким чином:

1) формулами є довільні висловлювання $p, q, r, \ldots$;

2) якщо P та Q — формули, то $\overline{P}, (P) \vee (Q), (P) \wedge (Q), (P) \Rightarrow (Q), (P) \Leftrightarrow (Q)$ — теж формули.

Дужки тут записано для того, щоб вказати порядок виконання логічних операцій.

Отже, $p \Rightarrow, \wedge q \Leftrightarrow r$ формулами не є.

2. Значення логічних формул. Довільна формула

$$U = f(p, q, r...)$$

при певних значеннях складових висловлювань $p, q, r, ...$ є також висловлюванням. При цьому істинність чи хибність такої формули з'ясовують безпосереднім обчисленням.

Якщо ж треба з'ясувати всі можливі значення тієї чи іншої формули, то будують відповідну таблицю істинності. І навпаки, для будь-якої таблиці істинності можна записати відповідну формулу.

Формули $f(p, q, r, ...)$ та $\varphi(p, q, r, ...)$ називають *рівносильними*, якщо для довільних значень висловлювань $p, q, r, ...$, ці формули набувають однакових значень.

3. Порядок виконання логічних операцій. Якщо домовитись про порядок виконання логічних операцій, то кількість дужок у формулі можна зменшити. А саме:

1) якщо порядок виконання логічних операцій не задано (тобто не поставлено дужки), то відповідні операції виконують у такій послідовності:

заперечення, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$;

2) якщо без дужок підряд записано кілька однакових операцій, то їх виконують послідовно зліва направо.

Приміром, знаходячи значення виразу $p \vee q \Rightarrow p \wedge q$, який є формулою, треба спочатку знайти значення формул $p \wedge q$ та $p \vee q$, а потім — значення імплікації цих висловлювань:

$$p \vee q \Rightarrow p \wedge q \equiv (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q).$$

Якщо під час знаходження значень формули $f(p, q, r, ...)$ останньою виконується операція $\vee$ (або $\neg, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$), то формулу $f(p, q, r, ...)$ називають диз'юнкцією (запереченням, кон'юнкцією, імплікацією, еквіваленцією).

4. Тавтологія і суперечність. Логічну формулу $f(p, q, r, ..., t)$, яка для довільних значень складових висловлювань $p, q, r, ..., t$ набуває лише істинних значень, називають *тавтологією* (*тотожно істинною* формулою). Логічну формулу $f(p, q, r, ..., t)$, яка для довільних значень складових висловлювань $p, q, r, ..., t$ набуває лише хибних значень, називають *суперечністю* (*тотожно хибною* формулою).

Заперечення тавтології є суперечністю і заперечення суперечності є тавтологією.

5. Принцип двоїстості. Характерною особливістю алгебри висловлювань є симетричність основних законів щодо логічних операцій $\wedge$ та $\wedge$.

Приміром,

$$p \vee q \equiv q \vee p \quad p \wedge q \equiv q \wedge p.$$

Розгляньмо тепер довільну формулу f. Якщо вона містить логічні операції $\Rightarrow$ та $\Leftrightarrow$, то користуючись законами:

$$p \Rightarrow q \equiv \overline{p} \vee q, \;\; p \Leftrightarrow q \equiv (\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{q} \vee p),$$

можна записати формулу f так, щоб вона не містила операцій $\Rightarrow$ та $\Leftrightarrow$.

Приміром, формулу

$$f(p,q) = p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$$

можна записати так:

$$f(p,q) = \overline{p \wedge (\overline{p} \vee q)} \vee q = \overline{p} \vee (p \wedge \overline{q}) \vee q.$$

Формули, які містять лише логічні операції $\neg, \wedge$ та $\vee$ називають *канонічними*.

Канонічні формули f та f^* називають *спряженими*, якщо одну з них можна дістати з іншої заміною логічних операцій $\vee, \wedge$ та висловлювань $1, 0$ відповідно на операції $\wedge, \vee$ та висловлювання $0, 1$.

Приміром, якщо

$$f(p,q) = (p \wedge q) \vee 0,$$

то

$$f^*(p,q) = (p \vee q) \wedge 1.$$

При цьому,

$$f^*(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \overline{f(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \ldots, \overline{p}_n)}.$$

Теорема 4.1 (принцип двоїстості).

> Якщо формула f є тавтологією (суперечністю), то й спряжена формула f^* є тавтологією (суперечністю).

Наслідки:

1) якщо $f \Rightarrow \varphi$ тавтологія, то $\varphi^* \Rightarrow f^*$ — тавтологія;

2) якщо $f \Leftrightarrow \varphi$ тавтологія, то $f^* \Leftrightarrow \varphi^*$ — тавтологія.

3) якщо $f \equiv 1$, то $f^* \equiv 0$;

4) якщо $f \equiv \varphi$, то $f^* \equiv \varphi^*$.

4.4. Перемикальні схеми

1. Однією з моделей логічних операцій є електрична схема, яка складається з джерела напруги (батареї), лампочки та одного або двох перемикачів x_1 та x_2. Перемикачі керуються кнопками із двома станами: кнопка натиснута (1) чи кнопка не натиснута (0). Якщо у вихідному стані перемикач розімкнений, то натискання кнопки його замикає. Перемикач може бути сконструйований так, щоб у початковому стані він замкнений, тоді натискання кнопки означає його розмикання (перемикач позначають із запереченням — $\overline{x}$).

Для відповідних станів кнопок лампочка набуває один із двох станів: горить (1) та не горить (0). Стан кнопок ототожнюють зі значеннями змінних x_1 та x_2, а стан лампочки — зі значенням функції $f(x_1, x_2)$ цих змінних.

Операції заперечення відповідає схема з одним замкненим ключем (рис. 4.1). Якщо кнопка натиснута ($x = 1$), перемикач розімкнено і лампочка не горить, тобто $f(x) = 0$, при не натиснутій кнопці ($x = 0$) перемикач замкнений і лампочка горить, тобто $f(x) = 1$. Операції диз'юнкції реалізує схема на рис. 4.2, а кон'юнкції — на рис. 4.3.

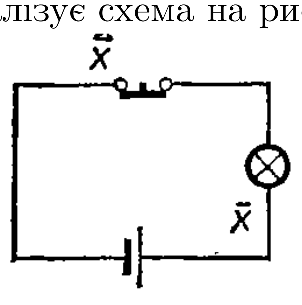

Рис. 4.1. Схема для заперечення

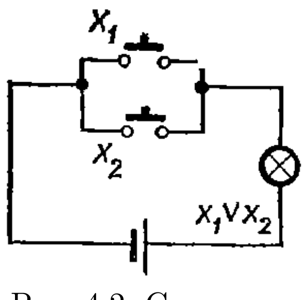

Рис. 4.2. Схема для диз'юнкції

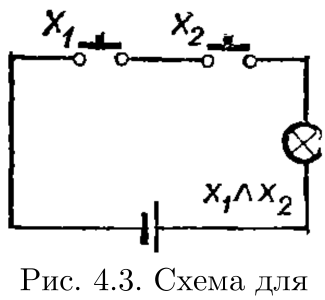

Рис. 4.3. Схема для кон'юнкції