ЛЕКЦІЯ 5. БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ

5.1. Основні поняття

1. Розгляньмо множину $B = \{0,1\}$. Функції $f : B^n \to B$ називають *функціями алгебри логіки* або *булевими функціями*. Булеву функція від n змінних можна задати таблицею істинності (рис. 5.1)

x_1	$\ldots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1,\ldots,x_n)$
0	$\ldots$	0	0	$f(0,\ldots,0,0)$
0	$\ldots$	0	1	$f(0,\ldots,0,1)$
0	$\ldots$	1	0	$f(0,\ldots,1,0)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
1	$\ldots$	1	1	$f(1,\ldots,1,1)$

Рис. 5.1

Набір $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ конкретних значень булевих змінних називають булевим набором завдовжки n (*інтерпретацією* булевої функції f).

Якщо кількість змінних n, то таблиця істинності має 2^n рядків, які відповідають усім можливим комбінаціям значень змінних, яким можна увідповіднити 2^{2^n} стовпців, які відповідають різним функціям.

Зауважмо, що k функцій від n змінних можна задавати за допомогою однієї таблиці (рис. 5.2), яка має 2^n рядків, n стовпців для значень змінних та k стовпців для значень функцій.

x_1	$\ldots$	x_n	$f_1(x_1,\ldots,x_n)$	$\ldots$	$f_k(x_1,\ldots,x_n)$
0	$\ldots$	0	$f_1(0,\ldots,0)$	$\ldots$	$f_k(0,\ldots,0)$
$\ldots$		$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
1	$\ldots$	1	$f_1(1,\ldots,1)$	$\ldots$	$f_k(1,\ldots,1)$

Рис. 5.2

Якщо перерахувати набори значень змінних у фіксованому (за зростанням відповідних двійкових чисел), то їх можна не писати. Інколи розглядають транспоновані таблиці.

2. Кажуть, що функція $f(x_1,\ldots,x_n)$ істотно залежить від змінної x_i, якщо існує такий набір значень $x_j = x_j^0, j \neq i$, що

$$f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{i-1}^0, 0, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0) \neq f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{i-1}^0, 1, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0).$$

Тоді змінну x_i називають *істотною* змінною, інакше x_i називають *неістотною* (*фіктивною*) змінною.

Нехай задано дві булеві функції $f_1(x_1,\ldots,x_{n-1})$ та $f_2(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)$ і нехай змінна x_n — неістотна для функції f_2, для однакових значень змінних значення функцій рівні:

$$\forall x_1^0,\ldots,x_{n-1}^0,x_n^0 : f_1(x_1^0,\ldots,x_{n-1}^0) = f_2(x_1^0,\ldots,x_{n-1}^0,x_n).$$

Тоді кажуть, що функцію f_2 одержано з функції f_1 *запровадженням неістотної змінної*, а f_1 одержано з f_2 *видаленням неістотної змінної*.

Дві булеві функції вважають *рівними*, якщо одну із другої можна одержати запровадженням (або видаленням) неістотних змінних.

3. Булеві функції можна задати такими способами:

1) таблицею істинності;

2) порядковим номером, який має ця функція;

3) аналітично (формулою).

4. Булеві функції однієї змінної $\varphi(x)$ задає таблиця на рис. 5.3

x	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Рис. 5.3

Розгляньмо функції однієї змінної детальніше:

1) функція $\varphi_0(x) = 0$ — функція стала 0;

2) функція $\varphi_1(x) = x$ — тотожна функція;

3) функція $\varphi_2(x) = \overline{x}$ — функція заперечення;

4) функція $\varphi_3(x) = 1$ — функція стала 0.

5. Булеві функції двох змінних задає таблиця на рис. 5.4.

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Рис. 5.4

Розгляньмо позначення деяких функцій двох змінних:

1) $f_1(x,y) = x \wedge y = xy$ — *кон'юнкція* (логічне «і»);

2) $f_6(x,y) = x \oplus y$ — *виключне або* (*сума за модулем* 2);

3) $f_7(x,y) = x \vee y$ — *диз'юнкція* (логічне «або»);

4) $f_8(x,y) = x \downarrow y$ — *стрілка Пірса* (заперечення диз'юнкції);

5) $f_9(x,y) = x \Leftrightarrow y$ — *еквіваленція*;

6) $f_{13}(x,y) = x \Rightarrow y$ — *імплікація*;

7) $f_{14}(x,y) = x \mid y$ — *штрих Шефера* (заперечення кон'юнкції).

6. Номери булевих функцій та інтерпретацій. Кожній функції відповідає порядковий номер, двійковий код якого зображує стовпець значень функції в таблиці істинності. Молодшим розрядом уважають найнижчий рядок (значення функції на інтерпретації $(1,1,\dots,1)$, а старшим — найвищий рядок (значення функції на інтерпретації $(0,0,\dots,0)$).

Кожна інтерпретація булевої функції також має свій номер — значення двійкового коду, який зображує інтерпретація.

5.2. Формули

1. Реалізація функцій формулами. Нехай $F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ — множина булевих функцій. *Формулою* над F називають вираз вигляду

$$\mathcal{F}[F] = f(t_1, \dots, t_m),$$

де $f \in F$ і t_i або змінна, або формула над F. Множину F називають базисом, функцію f називають зовнішньою функцією (операцією), а t_i називають підформулами.

Будь-якій формулі $\mathcal{F}$ однозначно відповідає деяка функція f.

2. Рівносильні формули. Одна функція може мати багато реалізацій (у заданому базисі). Формули, які реалізують одну й ту саму функцію, називають *рівносильними*.

3. Двоїстість. Нехай $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — булева функція. Тоді функцію

$$f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)} = \overline{f}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n),$$

називають *двоїстою* до функції f.

Правдиві твердження:

1) $f^{**} = f$;

2) якщо $f^* = g$, то $g^* = f$.

Якщо в таблиці істинності булевої функції f інвертувати (замінити 0 на 1, а 1 на 0), то одержана таблиця буде таблицею істинності двоїстої функції f^*.

Приміром,

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x_1	x_2	$(x_1 \wedge x_2)^*$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

=

x_1	x_2	$(x_1 \wedge x_2)^*$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

4. Функцію називають *самодвоїстою*, якщо $f^* = f$.

Приміром тотожна функція та заперечення самодвоїсті, а диз'юнкція та кон'юнкція — ні.

5. Реалізація двоїстої формули. Якщо функція $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ реалізує формула

$$f(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)),$$

то формула

$$f^*(f_1^*(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n^*(x_1, \ldots, x_n)),$$

реалізує функцію $\varphi^*(x_1, \ldots, x_n)$.

5.3. Нормальні форми

1. Диз'юнктивне розкладання булевих функцій за змінними. Нехай $x^y = (x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y})$. Тоді

$$x^y = \begin{cases} \overline{x}, & \text{якщо } y = 0, \\ x, & \text{якщо } y = 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & x \neq y \end{cases} = x \Leftrightarrow y.$$

Теорема 5.1 (про диз'юнктивне розкладання функції за змінними).

$$f(x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_n) = \bigvee_{(\sigma_1,\dots,\sigma_m)} x_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_m^{\sigma_m} \wedge f(\sigma_1,\dots,\sigma_m,x_{m+1},\dots,x_n),$$

де диз'юнкцію беруть за всіма можливими наборами $(\sigma_1,\dots,\sigma_m)$.

Наслідок 1.
$f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n) = x_n \wedge f(x_1,\dots,x_{n-1},1) \vee \overline{x}_n \wedge f(x_1,\dots,x_{n-1},0)$.

Наслідок 2.

$$f(x_1,\dots,x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1,\dots,\sigma_n): \\ f(\sigma_1,\dots,\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n}.$$

Зображення булевої функції $f(x_1,\dots,x_n)$ у вигляді

$$\bigvee x_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n}$$

називають *досконалою диз'юнктивною нормальною формою* (ДДНФ).

Надалі вважатимемо, що якщо $I = \varnothing$, а S_i — деякі формули, то

$$\bigvee_{i\in I} S_i = 0, \quad \bigwedge_{i\in I} S_i = 1.$$

Теорема 5.2 (про єдиність ДДНФ).

Будь-яка булева функція має єдину ДДНФ.

Наслідок. Будь-яку булеву функцію можна виразити через диз'юнкцію, кон'юнкція та заперечення.

2. Кон'юнктивне розкладання булевої функції.

Теорема 5.3 (про кон'юнктивне розкладання функції за змінними).

$$f(x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_n) = \bigwedge_{(\sigma_1,\dots,\sigma_m)} x_1^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_m^{\sigma_m} \vee f(\sigma_1,\dots,\sigma_m,x_{m+1},\dots,x_n),$$

де диз'юнкцію беруть за всіма можливими наборами $(\sigma_1,\dots,\sigma_m)$.

Наслідок 1.

$$f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n) = (x_n \vee f(x_1,\dots,x_{n-1},1)) \wedge (\overline{x}_n \vee f(x_1,\dots,x_{n-1},0)).$$

Наслідок 2.

$$f(x_1,\dots,x_n) = \bigwedge_{\substack{(\sigma_1,\dots,\sigma_n):\\ f(\sigma_1,\dots,\sigma_n)=0}} x_1^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n}.$$

Зображення булевої функції $f(x_1,\dots,x_n)$ у вигляді

$$\bigwedge x_1^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n}$$

називають *досконалою кон'юнктивною нормальною формою* (ДКНФ).

Теорема 5.4 (про единість ДКНФ).

Будь-яка булева функція має єдину ДКНФ.

5.4. Мінімізація булевих функцій

1. Пошук найпростішої логічної формули булевої функції широко використовують під час формування запитів до баз даних, у логічному програмуванні.

Задача мінімізації полягає в пошуку найпростішою згідно з вибраним критерієм мінімізації, формули.

Приміром, критерій може бути:

1) кількість змінних у формулі;

2) кількість знаків кон'юнкції та диз'юнкції або комбінація критеріїв.

2. *Імплікантою* деякої функції f називають функцію g таку, що на всіх інтерпретаціях, на яких $g(\dots) = 1$, $f(\dots) = 1$ також.

Елементарні кон'юнкції, що входять до складу ДНФ функції є її імплікантами.

Множину S, що складається з імплікант функції f, називають *покриттям* (*повною системою імплікант*) функції f, якщо кожне одиничне значення функції f покривається хоча б одної імпліканти з множини S.

Будь-яку елементарну кон'юнкцію A, що входить до складу елементарної кон'юнкції B і містить менше змінних, ніж кон'юнкція B, називають *власною частиною* кон'юнкції B, і вважають, що кон'юнкція A покриває кон'юнкцію B.

Простою імплікантою функції f називають таку кон'юнкцію-імпліканту, що ніяка її власна частина не є імплікантою заданої функції.

Множина всіх простих імплікант функції становить покриття заданої функції.

Диз'юнкцію всіх простих імплікант функції називають її *скороченою ДНФ*.

Тупиковою ДНФ називають ДНФ заданої булевої функції, що складається лише з простих імплікант.

На відміну від скороченої ДНФ, тупикова ДНФ може не містити деяких простих імплікант функції.

Кожна булева функція має єдину скорочену ДНФ і може мати декілька тупикових.

Мінімальною ДНФ заданої булевої функції називають одну з її тупикових ДНФ, якій відповідає найменше значення критерію мінімізації ДНФ.

3. Для знаходження множини простих імплікант функції, що задана ДДНФ, використовують такі перетворення формул:

1) *неповне диз'юнктивне склеювання*

$$(A \wedge x) \vee (A \wedge \overline{x}) = A \vee (A \wedge x) \vee (A \wedge \overline{x});$$

2) *диз'юнктивне поглинання*

$$A \vee (A \wedge x) = A;$$

3) *повне диз'юнктивне склеювання*

$$(A \wedge x) \vee (A \wedge \overline{x}) = A.$$

Тут A — деяка елементарна кон'юнкція змінних, x — булева змінна.

5.5. Повнота та замкненість

1. Нехай $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ — множина булевих функції n змінних. *Замиканням* F називають множину всіх булевих функцій, які можна реалізувати формулами над F і позначають $[F]$.

2. Замкнені класи функцій. Клас (множину) функцій називають *замкненим*, якщо $[F] = F$. Розгляньмо такі класи функцій:

1) клас *функцій, що зберігають* 0: $T_0 = \{f \mid f(0, \ldots, 0) = 0\}$;

2) клас *функцій, що зберігають* 1: $T_1 = \{f \mid f(1, \ldots, 1) = 1\}$;

3) клас *самодвоїстих* функцій: $T_* = \{f \mid f = f^*\}$;

4) клас *монотонних* функцій: $T_{\leq} = \{f \mid \overleftarrow{\alpha} \leq \overleftarrow{\beta} \Rightarrow f(\overleftarrow{\alpha}) = f(\overleftarrow{\beta})\}$, де

$$\overleftarrow{a} = (a_1, \ldots, a_n), \overleftarrow{b} = (b_1, \ldots, b_n), a_i, b_i \in B, \overleftarrow{a} \leq \overleftarrow{b} \Leftrightarrow \forall i : a_i \leq b_i;$$

5) клас *лінійних* функцій: $T_L = \{f \mid f = c_0 \oplus (c_1 \wedge x_1) \oplus \ldots \oplus (c_n \wedge x_n)\}$.

Теорема 5.5 (про замкненість класів).

Класи $T_0, T_1, T_*, T_\leq, T_L$ замкнені.

3. Клас функцій F називають *повним*, якщо будь-яка булева функція реалізовна як формула над F.

Приклади повних систем:

1) $\{\neg, \vee, \wedge,\}$; 2) $\{\neg, \wedge\}$; 3) $\{\neg, \vee\}$; 4) $\{\downarrow\}$; 5) $\{|\}$; 6) алгебра Жегалкіна $\{0, 1, \wedge, \oplus\}$.

Якщо система $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ повна, то система двоїстих функцій $F^* = \{f_1^*, \ldots, f_k^*\}$ також повна.

4. Поліном Жегалкіна. Зображення булевої функції над базисом $\{0, 1, \wedge, \oplus\}$ називають *поліномом Жегалкіна*:

$$a \oplus \bigoplus_{\substack{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n \\ k \in \overline{1, n}}} a_{i_1, \ldots, i_k} \wedge x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_k}, \quad a, a_{i_1, \ldots, i_k} \in \{0, 1\}.$$

5. Теорема 5.5 (Поста).

Система булевих функцій F повна тоді й лише тоді, коли вона містить хоча б одну функцію:

1) яка не зберігає 0;

2) яка не зберігає 1;

3) несамодвоїсту;

4) немонотонну;

5) нелінійну.

6. Одна й та сама функція може зображати у функціонально повній системі одну або кілька потрібних властивостей. Мінімальна кількість булевих функцій у функціонально повному наборі дорівнює одиниці. Одна функція може мати всі п'ять потрібних властивостей.

Повну систему булевих функцій називають нескоротною, якщо з неї не можна виключити жодної булевої функції, без утрати повноти.

Отже, максимальна кількість булевих функцій у нескоротному функціонально повному наборі дорівнює чотирьом.

На рис. 5.7 подано таблицю властивостей булевих функцій двох змінних.

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
		$f=0$	$x \wedge y$	$\overline{x \to y}$	x	$\overline{x \leftarrow y}$	y	$x \oplus y$	$x \vee y$	$x \downarrow y$	$x \sim y$	$\bar{y}$	$x \leftarrow y$	$\bar{x}$	$x \to y$	$x \mid y$	$f=1$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
L: Лінійність		+	-	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-	+	-	-	+
M: Монотонність		+	+	-	+	-	+	-	+	-	-	-	-	-	-	-	+
T_0: Зберігання 0		+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-
T_1: Зберігання 1		-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+
S: Самодвоїстість		-	-	-	+	-	+	-	-	-	-	+	-	+	-	-	-

Рис. 5.5