ЛЕКЦІЯ 6. ТЕОРЕМИ. МЕТОДИ ДОВЕДЕННЯ

Характерними рисами математики є її логічність, послідовність, доказовість і широке використання символіки, яке дозволяє записувати математичні факти стисліше та точніше.

Логіка вивчає закони і способи правильного мислення. Математична логіка — є частиною логіки, яку застосовують до аналізу основ математики та математичних доведень.

6.1. Предикати

1. У математиці, окрім висловлювань, розглядають твердження, які залежать від однієї чи кількох змінних. Їх називають *предикатами* і позначають $A(x), B(y), C(x,y), \ldots$ При цьому обов'язково зазначають, з якої множини розглядають змінну, від якої залежить предикат. Твердження $A(x), x \in M$, не є висловлюванням, якщо його розглядати на всій множині M. Для певного значення $x = x_0$ вже можна з'ясувати істинність чи хибність твердження $A(x_0)$, а, отже $A(x_0)$ вже є висловлюванням. Предикатами є всі рівняння чи нерівності.

Приміром, предикатом є твердження $A(x) =$ «$x > 0, x \in \mathbb{R}$». Так $A(-1)$ — хибне висловлювання, а $A(1)$ — правдиве.

2. Кажуть, що задано деякий предикат, якщо:

1) задано деяку множину M, яку називають областю означення предиката (предметна область);

2) фіксована множина $B = \{0,1\}$, яку називають множиною значень;

3) задано правило, що увідповіднює кожен елемент множини M елементу множини B.

3. Предикат, який залежить від n змінних називають n-місним і позначають $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Висловлювання вважають нульмісним предикатом; «x — дійсне число» — одномісний предикат; «y менше за z» — двомісний предикат.

Змінну, що входить у предикат називають вільною, якщо умова предиката не зумовлює її природу, інакше змінну називають зв'язаною.

4. Множину M, на якій задано предикат $A(x)$, можна розбити на дві підмножини. Одна містить ті елементи M, для яких висловлювання $A(x)$ істинне і її називають *областю істинності* предиката $A(x)$.

Два предикати $A(x)$ та $B(x)$, які задано на одній і тій самій множині, називають *рівносильними*, якщо їхні області істинності рівні.

Для предикатів, як і для висловлювань, означують дії заперечення, кон'юнкції, диз'юнкції, імплікації та еквіваленції.

5. Квантори. Із предикатами поєднують такі два типи висловлювань:

1) для всіх елементів x із множини M істинний $A(x)$;

2) існує елемент $x = x_0$ із множини M, такий, що $A(x_0)$ істинний.

Квантор загальності $\forall$ відповідає словам «для будь-якого», «для всіх». Вираз «для будь-якого $x \in M$ виконано $A(x)$» скорочено записують як

$$\boxed{\forall x \in M : A(x).}$$

Квантор існування $\exists$ відповідає словам «існує», «знайдеться». Вираз «існує $x \in M$ такий, що виконано $A(x)$» скорочено записують як

$$\boxed{\exists x \in M : A(x).}$$

Вираз «існує *єдиний* $x \in M$, такий, що виконано $A(x)$» записують як

$$\boxed{\exists!\, x \in M : A(x).}$$

6. Якщо символьний запис твердження P містить квантори $\exists, \forall$ та умову $A(x)$, то будуючи символьний запис протилежного твердження $\overline{P}$, квантор $\exists$ замінюють на $\forall$, квантор $\forall$ — на $\exists$, а умову A — на $\overline{A}$. Отже,

$$\overline{\forall x \in M : A(x)} \Leftrightarrow \exists x_0 \in M : \overline{A}(x);$$
$$\overline{\exists x_0 \in M : A(x)} \Leftrightarrow \forall x \in M : \overline{A}(x).$$

6.2. Складові математичної теорії

1. Строга побудова будь-якої математичної теорії вимагає означення всіх використаних понять. Кожне означення точно описує, характеризує означуване поняття (A) за допомогою іншого поняття (B), яке вважають відомим, або простішим, ніж A. При цьому поняття B також треба строго означити, і його означення міститиме поняття C (простіше, ніж B) тощо. Отже, кожна теорія потребує набору «найпростіших» понять, які вже не означують. Такі поняття називають *первісними*. Зміст первісних понять розкривають прикладами.

2. Щоб побудувати математичну теорію потрібно:

1) визначити перелік *первісних понять* — «найпростіших» понять, які не означують, а лише описують;

2) описати властивості основних понять за допомогою *аксіом* — тверджень, які вважають правдивими і які не вимагають доведень;

3) сформулювати низку *означень* для понять теорії;

4) сформулювати й довести *твердження*, які ще називають *теоремами*, про властивості означених об'єктів.

6.3. Типи теорем

1. Теореми в математиці зазвичай формулюють так:

Для кожного елемента x множини M з $P(x)$ випливає $Q(x)$ або

Для всіх $x \in M$, якщо $P(x)$, то $Q(x)$.

У символьному вигляді теорему можна записати як

$$\boxed{\forall x \in M : P(x) \Rightarrow Q(x),}$$

де $P(x)$ — *умова* теореми (засновок), $Q(x)$ — *висновок*.

2. Виділяють чотири типи теорем:

$P(x) \Rightarrow Q(x)$ — *пряма*;

$Q(x) \Rightarrow P(x)$ — *обернена*;

$\bar{P}(x) \Rightarrow \bar{Q}(x)$ — *протилежна*;

$\bar{Q}(x) \Rightarrow \bar{P}(x)$ — *протилежна оберненій*.

Теореми пряма і протилежна оберненій, а також обернена і протилежна — еквівалентні:

$$(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow (\bar{Q}(x) \Rightarrow \bar{P}(x));$$

$$(Q(x) \Rightarrow P(x)) \Leftrightarrow (\bar{P}(x) \Rightarrow \bar{Q}(x)).$$

Якщо пряма теорема правдива, то обернена може бути як правдивою, так і неправдивою.

3. Приміром, для Піфагорової теореми правдивими є пряма теорема «Якщо трикутник прямокутний, то квадрат більшої сторони дорівнює сумі квадратів двох менших сторін трикутника» й обернена теорема «Якщо квадрат більшої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох менших сторін, то такий трикутник прямокутний».

А от для прямої правдивої теореми: «Якщо кути вертикальні, то вони рівні», обернена теорема: «Якщо кути рівні, то вони вертикальні» не є правдивою.

4. Якщо твердження $P(x) \Rightarrow Q(x)$ правдиве, то кажуть, що $P(x)$ є *достатньою умовою* для $Q(x)$, а $Q(x)$ — *необхідною умовою* для $P(x)$.

Якщо правдиві пряма теорема $P(x) \Rightarrow Q(x)$ й обернена $Q(x) \Rightarrow P(x)$, то умова $P(x)$ є *необхідною та достатньою* для умови $Q(x)$ й умова $Q(x)$ — *необхідною та достатньою* для $P(x)$. Отже, умови $P(x)$ та $Q(x)$ — еквівалентні. Тоді пишуть

$$\boxed{P(x) \Leftrightarrow Q(x),}$$

Твердження такої теореми зазвичай звучить так: «$P(x)$ тоді й лише тоді, коли $Q(x)$». Такі теореми ще називають *критеріями*.

6.4. Основні методи доведення

1. Зазвичай математичне твердження (теорему) $P(x) \Rightarrow Q(x)$ доводять, будуючи ланцюжок

$$P(x) \Rightarrow R_1(x) \Rightarrow .... \Rightarrow R_n(x) \Rightarrow Q(x)$$

наслідків, кожен елемент якого або є аксіомою, або є вже доведеним твердженням. Цей тип доведення (*пряме доведення*) ґрунтується на правилі класичного виведення: якщо $P(x)$ і $P(x) \Rightarrow Q(x)$ є правдивими, то $Q(x)$ — правдиве.

2. Але, інколи ефективним є *доведення від супротивного*, яке ґрунтується на властивості

$$(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow (\bar{Q}(x) \Rightarrow \bar{P}(x)).$$

Схема доведення методом від супротивного.

Крок 1. Припускають правдивість умови $\bar{Q}$.

Крок 2. Міркуваннями приводять до суперечності з умовою P.

Крок 3. Висновують про правдивість теореми.

3. Часто в математичних твердженнях йдеться про нескінченну кількість об'єктів. Існує метод міркувань, що замінює нездійсненний перебір такої нескінченної кількості випадків — *метод математичної індукції*, який ґрунтується на *принципі математичної індукції*:

Твердження $P(n)$, правдивість якого залежить від натурального числа n, уважають правдивим, якщо виконано дві умови:

1) твердження $P(n)$ правдиве для $n = 1$;

2) із припущення, що твердження $P(n)$ правдиве для $n = k$, де k — будь-яке натуральне число, випливає, що воно правдиве і для значення $n = k + 1$.

Схема методу математичної індукції.

Крок 1. Перевіряють правдивість твердження $P(1)$.

Крок 2. Припускаючи правдивість твердження $P(k)$, доводять істинність твердження $P(k+1)$.

Крок 3. Висновують про правдивість твердження: «якщо твердження правдиве для кожного натурального значення k, то, відповідно до принципу математичної індукції, твердження $P(n)$ є правдивим для будь-яких натуральних значень n».

4. Доведімо методом математичної індукції, що

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, n \in \mathbb{N}.$$

[***Крок 1.*** *Перевіряємо правдивість твердження для* $n = 1$.]

Для $n = 1$ рівність правдива:

$$1 \cdot 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3}.$$

[***Крок 2.*** *Припускаючи правдивість твердження для* $n = k$, *доводимо твердження для* $n = k + 1$.]

Нехай ця рівність правдива при $n = k$:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Доведімо, що рівність правдива і при $n = k + 1$, тобто

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

Справді,

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + k(k+1) + (k+1)(k+2) =$$
$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

[***Крок 3.*** *Висновуємо правдивість твердження для будь-якого* n.]

За принципом математичної індукції твердження є правдивим для будь-якого $n \in \mathbb{N}$.

6.5. Дедуктивні висновки в логіці висловлювань

1. Висловлювання p є *логічним наслідком* висловлювання q, якщо формула $p \Rightarrow q$ є тотожно істинною. Висловлювання q називають *логічним наслідком* висловлювань $p_1, p_2, \ldots, p_n$, якщо $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots p_n \Rightarrow q$ — тотожно істинна формула.

Висловлювання q є логічним наслідком висловлювання p, якщо:

1) висловлювання $p \Rightarrow \overline{q}$ є тотожно хибним;

2) на всіх інтерпретаціях, на яких p істинне, q теж істинне.

Якщо висловлювання q є логічним наслідком висловлювання p і висловлювання p — тотожно істинне, висловлювання q є також тотожно істинним.

Якщо висловлювання p є тотожно хибним, то для будь-якого висловлювання q правильно, що $p \Rightarrow q$.

2. *Дедуктивним висновком* називають висновок формули Q з формули Q, заснований на тому, що Q є логічним наслідком P.

Правила для дедуктивного висновку будують на підставі тавтологій формул логіки висловлювань вигляду $p \Rightarrow q$:

1) *правило введення диз'юнкції* $p \Rightarrow p \vee q$;

2) *правило введення кон'юнкції* $(p) \wedge (q) \Rightarrow p \wedge q$;

3) *правило видалення диз'юнкції* $(p \vee q) \wedge \overline{p} \Rightarrow q$;

4) *правило видалення кон'юнкції* $(p \wedge q) \Rightarrow p$;

5) *правило контрапозиції імплікації* $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$;

6) *правило виведення* (*modus ponens*) $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$;

7) *правило виведення від супротивного* (*modus tollens*) $\overline{q} \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow \overline{p}$;

8) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.