ЛЕКЦІЯ 7. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

Задачі, у яких вибирають з певної сукупності об'єктів елементи, що мають ті чи інші властивості, або розміщують ці елементи в певному порядку, і підраховують кількість способів здійснити вибір або розміщення називають *комбінаторними*.

Основним питанням комбінаторики є «Скільки?», яке ставлять у різних варіантах.

7.1. Скорочені позначення

1. Те, що індекс j *перебігає* натуральні значення від 1 до n скорочено записують як

$$\boxed{j = \overline{1, n} \Leftrightarrow j = 1, 2, \ldots, n.}$$

2. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — задані числа. Їх суму $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ коротко позначають як

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,}$$

де Σ — символ підсумовування, k — індекс підсумовування, і читають «сума за k від 1 до n».

Межі підсумовування можуть бути будь-якими цілими числами.

Сума не залежить від того, якою літерою позначено індекс підсумовування:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Символ підсумовування має властивості:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} c a_k = c \sum\limits_{k=1}^{n} a_k, c = \text{const};$

2) $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$.

Іноді виникає потреба у зсуві меж підсумовування в той чи інший бік за допомогою заміни індексу:

$$\sum_{k=l}^{n} a_k = \sum_{k=l+m}^{n+m} a_{k-m}, m \in \mathbb{Z}.$$

3. Добуток послідовних натуральних чисел від 1 до n включно називають *факторіалом* числа n і позначають

$$\boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.}$$

Читають «n факторіал».

Уважають, що

$$1! = 1.$$

Приміром,

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24, 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

З означення випливає, що для $n \geq 2$ правдива формула

$$n! = \underbrace{\overbrace{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)}^{n-1 \text{ множників}} \cdot n}_{n \text{ множників}} = (n-1)!n.$$

Щоб ця формула була правдивою і для $n = 1$:

$$1! = 1 \cdot 0!,$$

уважають, що й

$$\boxed{0! = 1.}$$

4. *Подвійним факторіалом* натурального числа n називають добуток послідовних натуральних чисел від 1 до n, які мають однакову парність з n, і позначають $n!!$.

Для $n = 2k-1, k \in \mathbb{N}$, маємо

$$\boxed{(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-3) \cdot (2k-1), \quad 1!! = 1.}$$

Для $n = 2k, k \in \mathbb{N}$, маємо

$$\boxed{(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k-2) \cdot (2k), \;\; 2!! = 2.}$$

Приміром,

$$5!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 = 15, 6!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48.$$

7.2. Правила суми й добутку

Більшість комбінаторних задач розв'язують за допомогою двох правил: правила суми і правила добутку.

1. Правило суми. Якщо об'єкт a можна вибрати m способами, а об'єкт b — іншими n способами, то вибір «або a, або b» можна здійснити $m+n$ способами.

Приміром, якщо на тарілці лежить 5 грушок і 4 яблука, то вибрати один фрукт (грушку чи яблуко) можна $4+5=9$ способами.

2. Правило добутку. Якщо об'єкт a можна вибрати m способами і після кожного з таких виборів об'єкт b можна вибрати n способами, то вибір «a та b» (у вказаному порядку) можна здійснити mn способами.

3. Приміром, якщо в кіоску продають ручки 5 видів і зошити 4 видів, та вибрати набір з ручки і зошита (пару — ручка і зошит) можна $5 \cdot 4 = 20$ способами.

7.3. Сполуки

1. Вибрані (або вибрані й розміщені) групи елементів називають *сполуками*. Якщо всі елементи сполуки різні, то дістають сполуки без повторень, а якщо елементи можуть повторюватись, то одержують сполуки з повтореннями.

2. Множину називають *упорядкованою*, якщо про кожні два її елементи можна говорити, що один з них передує іншому.

Приміром, множина раціональних чисел — упорядкована множина (раціональне число r_1 передує числу r_2, коли $r_1 < r_2$); множина точок відрізку — упорядкована множина (точка A відрізка передує точці B цього відрізка, коли точка A належить деякому відрізку MB); множина студентів, заданих їх списком, є впорядкована множина (той зі студентів передує іншому, чиє прізвище у списку подане раніше).

3. Щоб відрізнити запис упорядкованої множини від невпорядкованої, елементи впорядкованої множини часто записують у круглих дужках.

Приміром, $(1;2;3) \neq (1;3;2)$.

Одну й ту саму множину можна по-різному впорядковувати. Приміром, множину з трьох чисел $\{-5;1;3\}$ можна впорядкувати:

— за зростанням $(-5;1;3)$;

— за спаданням $(3;1;-5)$;

— за зростанням модуля числа $(1;3;-5)$ тощо.

Упорядкувати n-елементну множину — це означає вибрати який-небудь елемент за перший, потім який-небудь інший елемент — за другий тощо. Насамкінець, останній елемент — за n-й.

7.4. Розміщення

1. *Розміщенням* з n елементів по k елементів $(0 \le k \le n)$ називають будь-який упорядкований набір з k елементів n-елементної множини.

2. Розміщення різняться одне від одного або складом елементів або порядком їх розташування.

Приміром, із множини із трьох чисел $\{1;2;3\}$ можна скласти такі розміщення із двох елементів без повторень:

$$(1;2),(2;1),(1;3),(3;1),(2;3),(3;2)$$

і такі розміщення із двох елементів з повтореннями:

$$(1;1),(1;2),(2;1),(1;3),(3;1),(2;2),(2;3),(3;2),(3;3).$$

3. Кількість розміщень без повторень з n елементів по k позначають A_n^k, а розміщень з повтореннями — $\tilde{A}_n^k$.

Отже, з поданого прикладу випливає $A_3^2 = 6, \tilde{A}_3^2 = 9$.

З'ясуймо, скільки всього можна скласти розміщень з n елементів по k (без повторень).

Складання розміщення уявимо собі як послідовне заповнення k комірок.

На перше місце можна вибрати один з n елементів заданої множини (рис. 7.1).

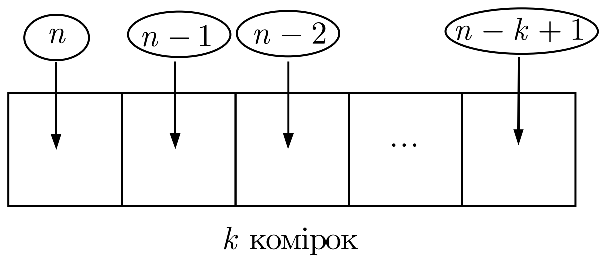

Рис. 7.1. Розміщення без повторень

На друге місце можна вибрати лише один елемент з тих, що залишились, тобто з $(n-1)$. На третє місце можна вибрати лише один з $(n-2)$ елементів тощо. Нарешті, на k-те місце можна вибрати лише один з $n-(k-1) = n-k+1$ елементів.

Оскільки потрібно вибрати елементи і на перше місце, і на друге, ..., і на k-те, то використовуємо правило добутку й одержуємо таку формулу кількості розміщень без повторень з n елементів по k елементів:

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}_{k \text{ множників}}.$$

Приміром, $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$.

4. За допомогою факторіалів кількість розміщень можна записати як

$$\boxed{A_n^k = \frac{n\,!}{(n-k)\,!} \quad (k \le n).}$$

5. З'ясуймо, скільки всього можна скласти розміщень з n елементів по k з повтореннями.

На перше місце можна вибрати один з n елементів заданої множини (рис. 7.2). Далі, якщо елементи можна повторювати, то на кожне наступне місце знову можемо вибрати один з n елементів заданої множини.

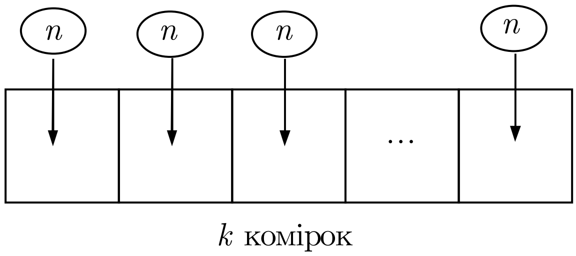

Рис. 7.2. Розміщення з повтореннями

Оскільки потрібно вибрати елементи і на перше місце, і на друге, ..., і на k-те, то використовуємо правило добутку й одержуємо таку формулу кількості розміщень з повтореннями з n елементів по k елементів:

$$\boxed{\tilde{A}_n^k = \underbrace{n \cdot n \cdot n ... n}_{k \text{ множників}} = n^k.}$$

Приміром, $\tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9$.

7.5. Перестановки

1. *Перестановкою* з n елементів (*без повторень*) називають будь-яку впорядковану підмножину з n елементів заданої множини.

2. Перестановки різняться одне від одного лише порядком розташування елементів; у перестановку входять усі елементи множини.

Фактично перестановки без повторень з n елементів є розміщенням з n елементів по n елементів без повторень.

Приміром, з трьох літер a,b та c маємо перестановки:

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

3. Кількість перестановок з n елементів без повторень позначають як

$$\boxed{P_n = A_n^n = n!.}$$

Приміром, $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

4. *Перестановкою з повтореннями* складу $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ з n елементів $a_1, a_2, \ldots, a_m$ деякої множини називають будь-який скінченний упорядкований набір, який складається з n елементів, і в який елемент a_1 входить k_1 разів, елемент a_2 входить k_2 разів, елемент a_m входить k_m разів.

5. Приміром, якщо переставлятимемо цифри в числі 4445 так, щоб одержати різні чотирицифрові числа, то одержимо перестановки з повтореннями, складені із трьох четвірок і однієї п'ятірки:

$$(4;4;4;5),(4;4;5;4),(4;5;4;4),(5;4;4;4).$$

6. Кількість перестановок з повтореннями позначають $\tilde{P}_n$ або $P(k_1, k_2, \ldots, k_m)$.

З'ясуємо, скільки всього можна скласти перестановок з повтореннями з n елементів, якщо в кожній з перестановок k_1 разів повторюється елемент a_1; k_2 разів повторюється елемент $a_2; \ldots; k_m$ разів повторюється елемент a_m.

Спочатку вважаємо, що всі n елементів, з яких складається перестановка, різні. Тоді одержуємо перестановки без повторень, їх кількість $P_n = n!$ (рис. 7.3).

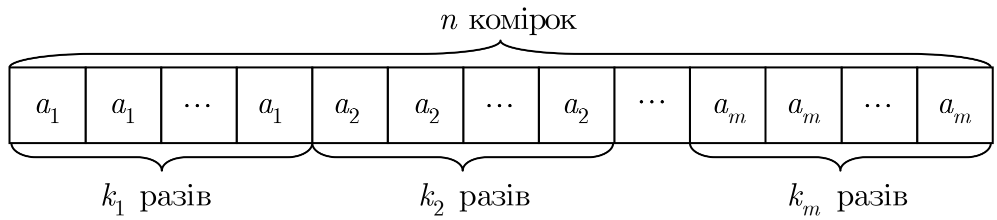

Рис. 7.3. Розміщення з повтореннями

Далі врахуємо, що після переставлення місцями елементів a_1, які займають якісь k_1 місць (не обов'язково підряд), розглянута перестановка не зміниться (оскільки ми переставляємо однакові елементи). Елементи, які стоять на k_1 місцях, можна переставити $k_1!$ способами. Підраховуючи загальну кількість перестановок використовують правилом добутку. Тоді в одержаному добутку $n!$, у разі повторення k_1 разів елемента a_1, зайвим є добуток $k_1!$.

Так само, якщо елемент a_2 повторюється k_2 разів, то в одержаному добутку $n!$ зайвим є добуток $k_2!$.

Повторюючи ці міркування m разів, одержуємо, що кількість перестановок з повтореннями з n елементів, у кожній з яких k_1 разів повторюється елемент a_1, k_2 разів повторюється елемент $a_2, \dots, k_m$ разів повторюється елемент a_m, де $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$, дорівнює

$$\boxed{\tilde{P}_n = P(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}.}$$

Приміром, кількість перестановок з повтореннями, складених із трьох четвірок і однієї п'ятірки, дорівнює

$$\tilde{P}_4 = P(3,1) = \frac{4!}{3!1!} = 4.$$

7.6. Комбінації

1. *Комбінацією* з n елементів по k елементів $(0 \le k \le n)$ називають будь-який набір з k елементів n-елементної множини.

2. Комбінації різняться одна від одної лише складом елементів.

Приміром, з елементів множини $\{a, b, c, d\}$ можна скласти такі комбінації без повторення із трьох елементів:

$$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}.$$

Із двох літер $\{a,b\}$ можна скласти такі комбінації з повтореннями з 4 елементів:

$$aaaa, aaab, aabb, abbb, bbbb.$$

3. Кількість комбінацій без повторень з n елементів по k позначають як C_n^k, а з повтореннями — як $\tilde{C}_n^k$.

Отже, з поданого прикладу випливає, що $C_4^3 = 4, \tilde{C}_2^4 = 5$.

З'ясуємо, скільки всього можна скласти комбінацій з n елементів по k (без повторень).

Складання розміщення без повторень з n елементів по k проведімо у два етапи. Спочатку виберімо k різних елементів із заданої n-елементної множини, не враховуючи порядок вибору цих елементів (тобто виберімо комбінацію без повторень з n елементів по k елементів). Це можна зробити C_n^k способами. Після цього одержану множину з k різних елементів упорядкуємо. Їх можна впорядкувати $P_k = k!$ способами. Одержимо розміщення без повторень з n елементів по k. Отже, кількість розміщень без повторень з n елементів по k в $k!$ разів більша за кількість комбінацій без повторень з n елементів по k. Тобто

$$A_n^k = C_n^k k\,!.$$

Звідси

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k\,!}$$

або

$$\boxed{C_n^k = \frac{n\,!}{(n-k)\,!\,k\,!}.}$$

Ураховуючи означення і властивості факторіала, формулу для кількості комбінацій можна переписати ще так:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}^{k\ \text{множників}}}{\underbrace{1\cdot 2\cdot 3...\cdot k}_{k\ \text{множників}}}.$$

Приміром,

$$C_4^3 = \frac{4\,!}{1!\,4\,!} = \frac{4}{1} = 4.$$

4. З формули обчислення C_n^k випливає така властивість

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Причому, домовились уважати, що $C_n^0 = C_n^n = 1$.

5. З'ясуємо, скільки всього можна скласти комбінацій з повтореннями з n елементів по k.

Повторення елементу уявімо як його копіювання й розміщення на відповідному місці копії цього елементу. Для того щоб в останню комірку можна було б помістити будь-який із заданих n елементів, у попередні $(k-1)$ комірки треба помістити копії вибраних елементів (рис. 7.4).

Але тоді фактично розміщується $n+k-1$ елементів (n заданих і $k-1$ копія) без повторень на k місць (не враховуючи порядок), а це можна зробити C_{n+k-1}^{k} способами.

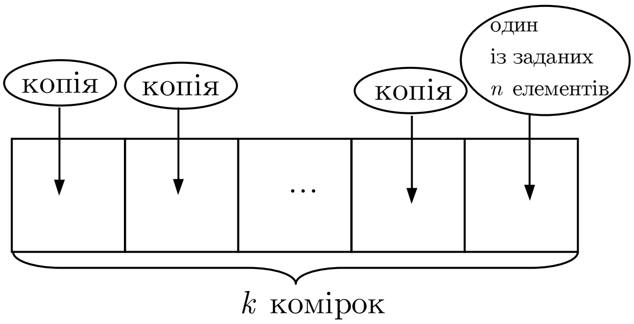

Рис. 7.4. Комбінації з повтореннями

Отже,

$$\boxed{\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^{k}.}$$

Приміром,

$$\tilde{C}_2^4 = C_5^4 = \frac{5!}{4!1!} = 5.$$

7.7. Біном Ньютона

1. *Біномом* (*двочленом*) називають суму або різницю двох алгебричних виразів, які є членами біному.

Важливим прикладами перетворення біномів є формули, які можна перевірити безпосередньо:

1) *квадрат суми*

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

2) *квадрат різниці*

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

3) *різниця квадратів*

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b);$$

4) *куб суми*

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

5) *куб різниці*

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

6) *сума кубів*

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$$

7) *різниця кубів*

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

Узагальненням формул 3) та 7) є формула

$$a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)(a^n+a^{n-1}b+...+ab^{n-1}+b^n)=$$
$$=(a-b)\sum_{k=0}^{n}a^{n-k}b^k.$$

Узагальненням формул 2) та 4) є формула біному Ньютона.

Теорема 1.3 (про біном Ньютона).

Для усіх дійсних чисел a та b, відмінних від нуля, і для кожного натурального значення n правдива формула *біному Ньютона*

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+...+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^{n-k}b^k,$$

де C_n^k — *біноміальні коефіцієнти*, які обчислюють за формулою

$$C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!k!}=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}.$$

Праву частину формули біному Ньютона називають *розкладом біному Ньютона*.

Доведення. Справді, під час перемноження n множників

$$(a+b)(a+b)...(a+b)$$

кількість членів вигляду $a^{n-k}b^k$ дорівнює C_n^k, оскільки k штук b в n множниках можна вибрати C_n^k способами. ■

2. Розклад біному Ньютона має властивості:

1) кількість членів розкладу дорівнює $n+1$;

2) у кожному члені розкладу суму показників степеня a та b дорівнює n;

3) розклад є многочленом, який спадає за степенями першого члена a, показники степеня a спадають від n до 0.

3. Біноміальні коефіцієнти мають такі властивості:

1) $C_n^k=C_n^{n-k}, k=0,1,...,n;$

2) $C_n^0=C_n^n=1;$

3) $C_{n+1}^{k+1}=C_n^k+C_n^{k+1}, k=0,1,...,n-1;$

4) $C_n^0+C_n^1+...+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n.$

4. Обчислювати кількість комбінацій без повторень можна також послідовно (для невеликих n), використовуючи властивість

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

При цьому вважають, що $C_0^0 = 1$.

Ця рівність дозволяє послідовно обчислювати значення C_n^k за допомогою таблиці, яку називають *трикутником Паскаля* (рис. 7.5).

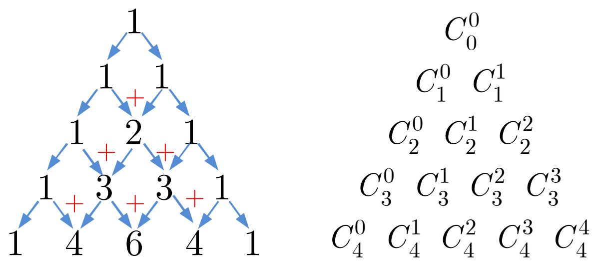

Рис. 7.5. Трикутник Паскаля

Кожен рядок починається з одиниці і закінчується одиницею, а решта коефіцієнтів є сумою двох найближчих до нього чисел попереднього рядка.

В n-му рядку трикутника стоять біноміальні коефіцієнти:

$$C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^{n-1}, C_n^n.$$