ЛЕКЦІЯ 8. КОМБІНАТОРНІ ЗАДАЧІ

Задачі, у яких вибирають з певної сукупності об'єктів елементи, що мають ті чи інші властивості, або розміщують ці елементи в певному порядку, і підраховують кількість способів здійснити вибір або розміщення називають *комбінаторними*.

Основним питанням комбінаторики є «Скільки?», яке ставлять у різних варіантах.

8.1. Принцип Діріхле

1. Теорема 8.1 (принцип Діріхле).

Нехай $k \in \mathbb{N}$. Якщо $k+1$ або більше об'єктів розміщено в k коробках, існує принаймні одна коробка, яка містить два або більше об'єкти.

Як наслідок, функція f з множини з $k+1$ або більше елементів у множини з k елементів не може бути взаємно однозначною.

Приміром, для будь-якої групи з 367 чоловік, гарантовано існує двоє, з тим самим днем народження, оскільки існує лише 366 можливих днів народження.

2. Узагальнений принцип Діріхле. Якщо N об'єктів розміщено в k коробках, існує принаймні одна коробка, яка містить принаймні $\left\lceil \dfrac{N}{k} \right\rceil$ об'єктів, де $\lceil x \rceil$ — найменше ціле число, яке не менше за x.

Приміром, серед 100 чоловік існує принаймні $\left\lceil \dfrac{100}{12} \right\rceil = 9$, хто народився в тому самому місяці.

8.2. Правило включень-виключень

1. Правило для двох множин. Нехай A_1 та A_2 множини. Існує $n(A_1)$ способів вибрати один елемент з A_1 та $n(A_2)$ способів вибрати елемент з A_2. Кількість способів вибрати елемент з A_1 або з A_2, а це кількість способів вибрати елемент з їхнього об'єднання ($n(A_1 \cup A_2)$), дорівнює сумі кількості способів вибрати елемент із множини A_1 та кількості способів вибрати елемент із множини A_2, за винятком кількості способів вибрати елемент з перетину $A_1 \cap A_2$. Тобто

$$n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2).$$

2. Правило ділення. Якщо скінченна множина A є об'єднанням попарно неперетинних підмножин, кожна з яких має d елементів, то

$$n = \frac{n(A)}{d}.$$

Приміром, скільки існує різних способів розсадити 4 людей за круглим столом, де дві розсадки вважають однаковими, коли кожна людини має тих самих сусідів.

Ми довільно вибираємо місце за столом і позначаємо його місцем 1. Нумеруємо решту місць, йдучи проти годинникової стрілки. Зауважмо, що існує 4 способи вибрати людину для місця 1, 3 способи вибрати людину для місця 2, два способи вибрати людину для місця 3 та 1 спосіб вибрати людину для місця 3. Отже, існує $4! = 24$ способи розмістити 4 людей на ці місця. Однак, кожен з 4 виборів для місця 1 веде до тієї самої розсадки. Отже, за правилом ділення існує $\dfrac{24}{4} = 6$ різних розсадок для 4 людей за круглим столом.

3. Принцип включення-виключення. Нехай $A_1, A_2, \dots, A_n$ скінченні множини. Тоді

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{1 \le i \le n} n(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} n(A_i \cap A_j) +$$
$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} n(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} n(A_1 \cap A_2 \cap \dots A_n).$$

Розгляньмо альтернативне формулювання принципу включення-виключення.

Нехай A_i є підмножиною, яка містить елементи з властивістю P_i. Кількість елементів з усіма властивостями $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_k}$ позначатимемо $n(P_{i_1} P_{i_2} \dots P_{i_k})$. Записуючи ці величини мовою множин, маємо

$$n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_n}) = n(P_{i_1} P_{i_2} \dots P_{i_k}).$$

Кількість елементів з жодною з властивостей $P_1, P_2, ..., P_n$ позначають $n(P_1'P_2'...P_n')$ тоді

$$n(P_1'P_2'...P_n') = n(A) - n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n).$$

З принципу включення-виключення дістаємо, що

$$n(P_1'P_2'...P_n') = n(A) - \sum_{1 \le i \le n} n(P_i) + \sum_{1 \le i < j \le n} n(P_i P_j) -$$
$$- \sum_{1 \le i < j < k \le n} n(P_i P_j P_k) + ... + (-1)^n n(P_1 P_2 ... P_n).$$

Приміром, розгляньмо кількість розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + x_3 = 11$, де $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}, 1 \le x_1 \le 3, 1 \le x_2 \le 4, 1 \le x_3 \le 6.$

Нехай властивість P_1 полягає в тому, що $x_1 > 3$, властивість P_2 полягає в тому, що $x_2 > 4$, властивість P_3 полягає в тому, що $x_3 > 6$. Кількість розв'язків, які справджують обмеження дорівнює

$$N(P_1'P_2'P_3') = n(A) - n(P_1) - n(P_2) - n(P_3) +$$
$$+ n(P_1P_2) + n(P_1P_3) + n(P_2P_3) - n(P_1P_2P_3).$$

Тоді,

$$n(\text{кількість розв'язків}) = C_{3+11-1}^{11} = C_{13}^{11} = 78;$$
$$n(P_1) = C_{3+7-1}^{7} = C_9^7 = 36;$$
$$n(P_2) = C_{3+6-1}^{6} = C_8^6 = 28;$$
$$n(P_2) = C_{3+4-1}^{4} = C_6^4 = 15;$$
$$n(P_1P_2) = C_{3+2-1}^{2} = C_4^2 = 6;$$
$$n(P_1P_3) = C_{3+0-1}^{0} = 1;$$
$$n(P_1P_3) = 0;$$
$$n(P_1P_2P_3) = 0.$$

Підставляючи ці величини у формули, дістаємо

$$n(P_1'P_2'P_3') = 78 - 36 - 28 - 15 + 6 + 1 + 0 - 0 = 6.$$

4. Розупорядкування. *Розупорядкуванням* називають таку перестановку об'єктів, що жоден з об'єктів не залишається на початковій позиції.

Приміром, перестановка 21453 є розупорядкуванням 12345, оскільки жодне з чисел не залишилось на початковій позиції. Однак, 21543 не є розупорядкуванням, оскільки 4 залишилась на місці.

Кількість розупорядкувань множини з n елементів дорівнює

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

8.3. Твірні функції

1. *Твірною функцією* послідовності $\{a_n\}$ дійсних чисел називають ряд

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Твірну функцію для скінченної послідовності $a_0, a_1, \ldots, a_n$ можна побудувати, доозначаючи її $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = 0$. Твірна функція $G(x)$ такої послідовності $\{a_n\}$ є многочленом степеня n:

$$G(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

Приміром, твірною функцією для послідовності $a_k = C_m^k, k = \overline{0, m}, m \in \mathbb{N}$, є

$$G(x) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k x^k = (1 + x)^m.$$

Для твірних функцій розглядають зазвичай формальні степеневі ряди, ігноруючи питання про їхню збіжність.

2. Сума та добуток степеневих рядів. Нехай

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

Тоді

$$f(x) + g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k;$$

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right) x^k.$$

Приміром, знайдімо множенням рядів розвинення для $\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n;$$
$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

3. Нехай $u \in \mathbb{R}$ та $k \in \mathbb{N}_0$. *Узагальненим біноміальним коефіцієнтом* називають

$$C_u^k = \begin{cases} \dfrac{u(u-1)...(u-k+1)}{k!}, & k > 0, \\ 1, & k = 0. \end{cases}$$

Приміром,

$$C_{-2}^3 = \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!} = -4;$$
$$C_{1/2}^3 = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!} = \frac{1}{16}.$$

Зокрема,

$$C_{-n}^r = (-1)^r C_{n+r-1}^r.$$

Нехай x — дійсне число, таке що $\left|x\right| < 1, u \in \mathbb{R}$. Тоді

$$(1+x)^u = \sum_{k=0}^{\infty} C_u^k x^k.$$

4. Твірні функції можна використати до розв'язання широкого кола комбінаторних задач.

Приміром, задача знаходження кількості розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + x_3 = 17$, де x_1, x_2 та x_3 натуральні числа, що справджують нерівності $2 \le x_1 \le 5$, $3 \le x_2 \le 6$, $5 \le x_3 \le 7$, зводиться знаходження коефіцієнта при x^{17} у розвиненні

$$(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^4 + x^5 + x^6 + x^7).$$

Цей коефіцієнт, і відповідно кількість розв'язків рівняння, дорівнює 3.

5. Застосування твірних функцій до розв'язання рекурентних рівнянь. Приміром, розв'яжімо рівняння $a_k = 3a_{k-1}$ для $k \in \mathbb{N}, a_0 = 2$.

Нехай $G(x)$ є твірною функцією послідовності $\{a_k\}$, отже,

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Зауважмо, що

$$xG(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k.$$

Використовуючи рекурентне співвідношення, маємо

$$G(x) - 3xG(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - 3\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - 3a_{k-1}) x^k = 2.$$

Тому,

$$G(x) - 3xG(x) = (1 - 3x)G(x) = 2.$$

Отже,

$$G(x) = \frac{2}{1-3x} = 2\sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k \Rightarrow a_k = 2 \cdot 3^k.$$

6. Використання твірних функцій для доведення тотожностей. Доведімо, що

$$\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k \right)^2 = C_{2n}^n, n \in \mathbb{N}.$$

Біноміальний коефіцієнт C_{2n}^n є коефіцієнтом x^n у розкладі $(1+x)^{2n}$.

Однак, маємо

$$(1+x)^{2n} = \left[(1+x)^n \right]^2 = \left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k \right]^2.$$

Коефіцієнт при x^n у цьому розкладі дорівнює

$$C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + ... + C_n^n C_n^0 = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2,$$

оскільки $C_n^{n-k} = C_n^k$.