

ЛЕКЦІЯ 9. ГРАФИ

- 9.1. Неорієнтовані графи
- 9.2. Вершини й ребра неорієнтованого графа
- 9.3. Деякі спеціальні типи графів
- 9.4. Двочасткові графи
- 9.5. Дії над графами
- 9.6. Способи представлення графів
- 9.7. Шляхи у графі

Раніше графи були використано для зображення відношень. Однак теорія графів має власну проблематику і є важливим розділом математики.

9.1. Неорієнтовані графи

1. Сформулюємо означення неорієнтованого графа.

Означення 9.1 (графа).

Графом $G = (V, E)$ називають сукупність двох множин — непорожньої множини *вершин* графа V і множини E *ребер* графа. Кожне ребро з'єднує (зв'язує) одну або дві вершини, які називають *кінцями* ребра.

Граф з нескінченною множиною вершин або нескінченною множиною ребер називають *нескінченим*. Граф зі скінченними множинами вершин та ребер називають *скінченними* (далі розглядаємо скінченні графи).

Граф зображують як діаграму, на якій вершини позначають точками, а ребрами, які з'єднують дві вершини, — лініями між цими точками.

2. Приміром, граф із множиною вершин $\{a, b, c\}$ та множиною ребер $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$ можна зобразити як на рис. 9.1 або на рис. 9.2.

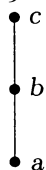


Рис. 9.1

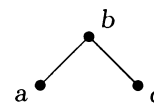


Рис. 9.2

3. Ребро, яке з'єднує вершину саму із собою, називають *петлею*. Якщо пари вершин з'єднані не одним ребром, а декількома, то такі ребра називають *кратними*.

4. Граф називають *простим*, якщо будь-які дві його вершини з'єднані не більш, ніж одним ребром і кожне ребро з'єднує різні вершини.

Граф, який містить кратні ребра (але не петлі) називають *мультиграфом* (рис. 9.3). Граф, який містить кратні ребра або петлі називають *псевдографом* (рис. 9.4).

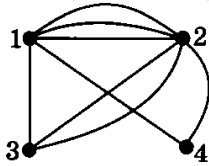


Рис. 9.3

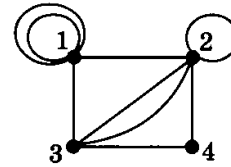


Рис. 9.4

9.2. Вершини й ребра неорієнтованого графа

1. Суміжність та інцидентність. Дві вершини $u \in V$ та $v \in V$ неорієнтованого графа $G = (V, E)$ називають *суміжними* (*сусідніми*) в G , якщо u та v є кінцями ребра $e \in E$. Ребро e називають *інцидентним* вершинам u та v . Два ребра називають *суміжними*, якщо вони інцидентні спільній вершині.

Вершину називають *ізолюваною*, якщо в неї немає петель і з неї не виходить жодного ребра.

2. Множину всіх сусідніх вершин вершини v графа $G = (V, E)$ називають *околом* v і позначають $N(v)$.

Степенем вершини v графа називають кількість ребер, інцидентних цій вершині (петлі рахують двічі) і позначають $\deg v$.

Ізолювана вершина має степінь 0. Вершину степеня 1 називають *висячою*. Висяча вершина суміжна лише з однією вершиною.

3. Приміром, у графі на рис. 9.5, вершини a та c — суміжні, а e_1, e_2 та e_3 — суміжні ребра.

Однак, вершини a та f суміжними не є, а e_2 та e_5 не є суміжними ребрами. Вершини b, c та d мають степінь 2, а вершини a та f мають степінь 3.

У графа на рис. 9.6

$$N(a) = \{b, d, e\}, N(b) = \{a, b, c, d, e\}, N(c) = \{b\},$$

$$N(d) = \{a, b, e\}, N(e) = \{a, b, d\}.$$

$$\deg a = 4, \deg b = \deg e = 6, \deg c = 1, \deg d = 5.$$

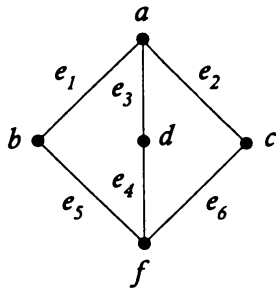


Рис. 9.5

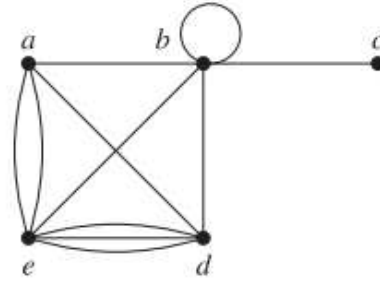


Рис. 9.6

4. Лема 9.1 (про рукостискання).

Нехай $G = (V, E)$ — неорієнтований граф з m вершинами. Тоді

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2m.$$

Доведення. Кожне ребро вносить 2 до суми степенів вершин, оскільки ребро інцидентне точно з парою (можливо однакових) вершин. ■

Отже, сума степенів вершин неорієнтованого графа парна.

Теорема 9.1.

У будь-якому графі кількість вершин непарного степеня парна.

9.3. Деякі спеціальні типи графів

1. Повні графи. *Повним* графом на n вершинах називають простий граф, який містить точно одно ребро між кожною парою різних вершин і позначають K_n (рис. 9.7). Простий граф, який має хоча б одну пару різних незв'язаних вершин називають неповним.

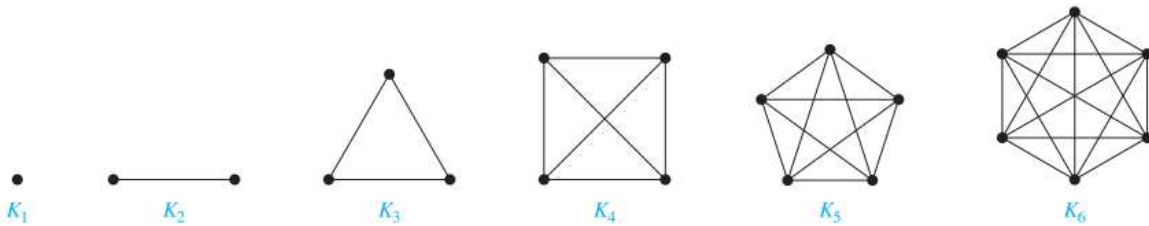


Рис. 9.7

2. Цикли. *Циклом* $C_n, n \geq 3$, називають граф, який має n вершин v_1, v_2, \dots, v_n і ребер $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}$ та $\{v_n, v_1\}$ (рис. 9.8).

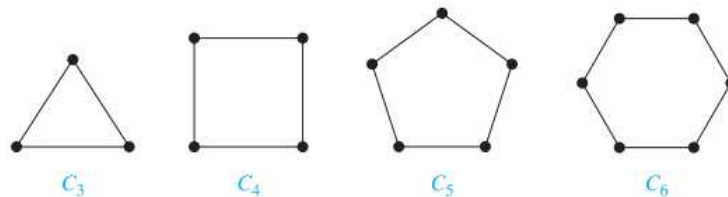


Рис. 9.8

3. Колеса. *Колесо* W_n дістають із циклу $C_n, n \geq 3$, додаючи додаткову вершину і з'єднуючи цю нову вершину з кожною з вершин циклу C_n ребрами (рис. 9.9).

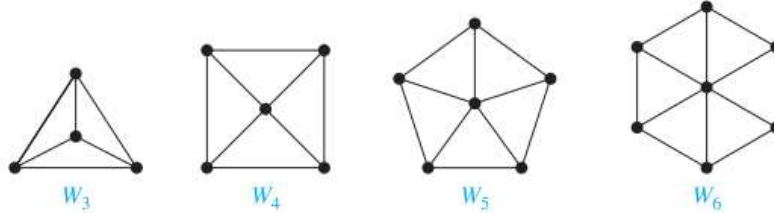


Рис. 9.9

4. Гіпер-куби. n -вимірним гіперкубом Q_n називають граф, вершини якого представляють 2^n бітні рядки завдовжки n . Дві вершини суміжні тоді й лише тоді, коли бітні рядки, які вони представляють, відрізняються лише однією позицією (рис. 9.10).

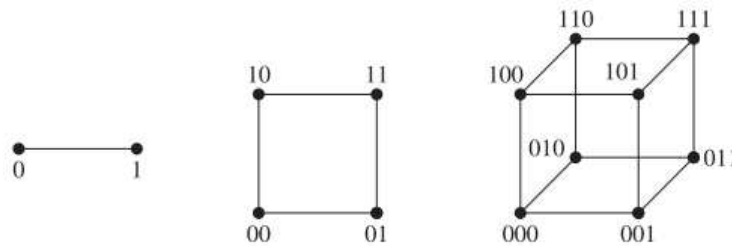


Рис. 9.10

9.4. Двочасткові графи

1. Означення 9.1 (двочасткового графа).

Простий граф $G = (V, E)$ називають *двочастковим (біграфом)*, якщо його множину вершин V можна розбити на дві неперетинні множини V_1 та V_2 , $V = V_1 \cup V_2$, такі що кожне ребро з'єднує вершину V_1 з вершиною з V_2 (тобто не існує у графі G ребра, щоб з'єднувало дві вершини з множини V_1 або дві вершини із множини V_2).

Приміром, цикл C_6 (див. рис. 9.8) є двочастковим графом (рис. 9.11):

$$V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}, V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}.$$

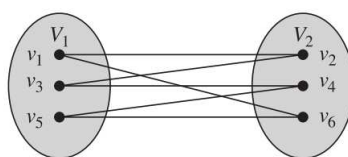


Рис. 9.11

Повний граф K_3 (див. рис. 9.7) не є двочастковим, оскільки в K_3 кожна вершина з'єднана з рештою.

Теорема 9.2 (критерій двочастковості графа).

Простий граф є двочастковим тоді й лише тоді, коли можливо розфарбувати одним із двох кольорів кожную вершину так, щоб дві сусідні вершини були різного кольору.

2. Повний двочастковий граф. Двочастковий граф називають *повним* двочастковим графом $K_{m,n}$, якщо множину його вершин V розбито на підмножини $V_1, n(V_1) = n$, та $V_2, n(V_2) = m$, і кожна вершина з V_1 з'єднана з кожною вершиною з V_2 ребром.

Графи $K_{1,2}, K_{2,3}, K_{2,2}$ та $K_{3,3}$ подано на рис. 9.12.

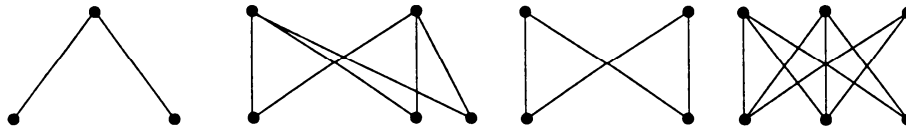


Рис. 9.12

3. Парування. *Паруванням* простого графа $G(V, E)$ називають множину $M \subset E$ попарно несуміжних ребер графа (тобто таких, що не мають спільних вершин).

Вершину називають *спарованою*, якщо вона є кінцевою для одного з ребер парування M , інакше — *неспарованою*.

Максимальним паруванням називають парування M , до якого не можна додати ще одне ребро не з M (рис. 9.13, приклади максимальних парувань позначено червоним). Тобто парування M графа G максимальне, якщо кожне ребро з E суміжне до хоча б одного з ребер з M).

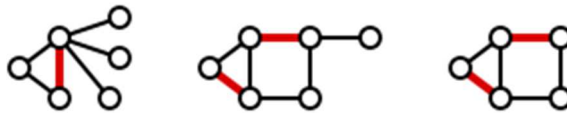


Рис. 9.13

Найбільшим паруванням називають парування з найбільшою можливою кількістю ребер (рис. 9.14).

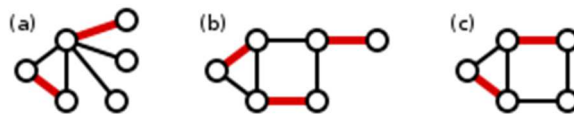


Рис. 9.14

Найбільших парувань можна бути декілька. Кожне найбільше парування є максимальним, але не навпаки.

4. Повне парування. Парування M двохчасткового графа $G(V, E)$ з розбиттям (V_1, V_2) називають *повним* паруванням з V_1 у V_2 , якщо кожна вершина V_1 є кінцевою ребра парування, тобто $n(M) = n(V_1)$.

Теорема 9.3 (Гола, про одруження).

Двохчастковий граф $G(V, E)$ з розбиттям (V_1, V_2) має повне парування з V_1 у V_2 тоді й лише тоді, коли $n(N(A)) \geq n(A)$ для всіх множин $A \subset V_1$.

9.5. Дії над графами

1. Підграф. *Підграфом* графа $G = (V, E)$ називають граф $G' = (V', E')$, якщо $V' \subset V$ та $E' \subset E$, і позначають $G'(V', E') \preceq G(V, E)$.

Підграф G' називають *властивим* підграфом G , якщо $G' \neq G$.

Отже, кожна вершина в G' є вершиною в G , і кожне ребро в G' є ребром у G .

2. Породжений граф. Нехай граф $G = (V, E)$ є простим. Графом, *породженням* множиною $W \subset V$, називають граф (W, F) , де множина $F \subset E$ містить лише ребра, що з'єднують вершини з W .

3. Видалення та додавання ребра до графа. Нехай задано граф $G = (V, E)$ і ребро $e \in E$. *Видаленням ребра* e дістаємо підграф

$$G - e = (V, E \setminus \{e\}).$$

Додаванням ребра e дістаємо підграф

$$G + e = (V, E \cup \{e\}),$$

у якому дві раніше неінцидентні вершини з'єднані ребром новим ребром e .

4. Видалення вершини з графа. *Видаленням вершини* v з графа $G = (V, E)$ дістаємо новий граф $G - v = (V \setminus \{v\}, E')$, де E' містить усі ребра — множина ребер графа G , неінцидентних вершині v .

5. Стягування ребра. Іноді потрібно видалити не лише ребро із графа, а й вершини, яке воно з'єднує. *Стягуванням ребра* e , яке з'єднує вершини u та v , називають дію, яка видаляє вершини u та v , додає нову вершину w , і з'єднує її ребром з кожною вершиною, яка була суміжна хоча б однієї з вершин u та v . Після цієї дії дістають граф

$$G' = (V \setminus \{u, v\} \cup \{w\}, E'),$$

де множина E' містить усі ребра з E , неінцидентні вершинам u та v , і нові ребра, що з'єднують вершину w з вершинами, суміжними вершинам u та v .

Одержаний граф G' не є підграфом графа G .

6. На рис. 9.15 поруч із графом G подано графи:

- 1) $G - \{b, c\}$, одержаний із графа G видаленням ребра $\{b, c\}$;
- 2) $G + \{e, d\}$, одержаний із графа G додаванням ребра $\{e, d\}$;
- 3) $G - c$, одержаний із графа G видаленням вершини c і ребер $\{b, c\}, \{c, d\}$ та $\{c, e\}$;
- 4) G' , одержаний із графа G стягуванням ребра $\{b, c\}$, а саме утворення нової вершини f і заміна ребер $\{c, d\}, \{a, b\}$ та $\{c, e\}$ на нові ребра $\{a, f\}, \{f, d\}$ та $\{f, e\}$.

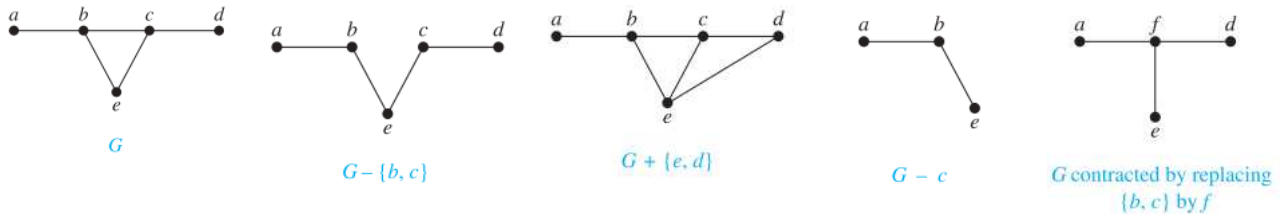


Рис. 9.15

7. **Об'єднання графів.** *Об'єднанням* двох простих графів $G_1 = (V_1, E_1)$ та $G_2 = (V_2, E_2)$ називають простий граф

$$G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2).$$

Приклад побудови об'єднання графів подано на рис. 9.16

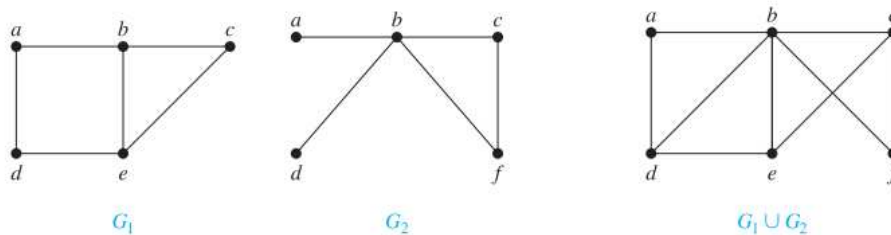


Рис. 9.16

9.6. Способи представлення графів

1. **Список суміжності.** Граф без кратних ребер можна задати переліком його ребер. Інший спосіб представити такий граф — це задати *список суміжності*: для кожної вершини вказати перелік суміжних з нею вершин.

Приміром, рис. 9.17

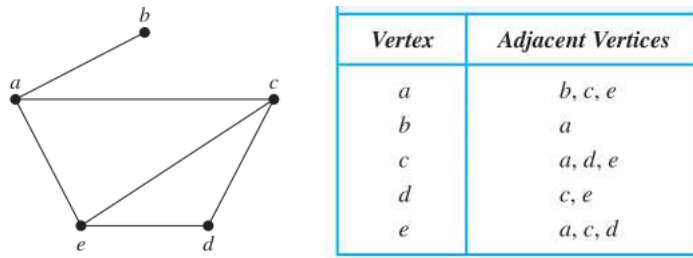


Рис. 9.17

2. Матриця суміжності. Нехай $G = (V, E), n(V) = n$, — простий граф із занумерованими вершинами v_1, v_2, \dots, v_n . Матрицею суміжності графа G називають матрицею $A_{n \times n}$ з елементами:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{вершини } v_i \text{ та } v_j \text{ суміжні,} \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

називають *матрицею суміжності* графа G .

Матриця суміжності графа базується на способі нумерації вершин. Існує $n!$ різних матриць суміжності для графа з n вершинами.

Матриця суміжності:

- 1) будь-якого неорієнтованого графа є симетричною;
- 2) простого графа має лише нулі на головній діагоналі ($a_{ii} = 0, i = 1, n$);

3) графа з петлею у вершині v_i має елемент $a_{ii} = 1$;

4) для графа з кратними ребрами має елементи:

$$a_{ij} = \begin{cases} \text{кількість ребер,} & \text{вершини } v_i \text{ та } v_j \text{ суміжні,} \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Для графа з петлями покладають $a_{ii} = 1$.

3. Приміром граф G на рис. 9.18, $a = v_1, b = v_2, c = v_3, d = v_4$, має таку матрицю суміжності:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

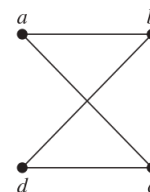


Рис. 9.18

Псевдограф G на рис. 9.19 має матрицю суміжності

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

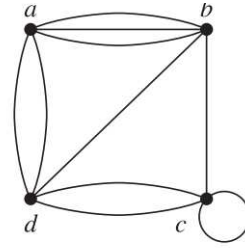


Рис. 9.19

4. Матриця інцидентності. Нехай $G = (V, E)$ — неорієнтований граф з вершинами v_1, v_2, \dots, v_m та ребрами e_1, e_2, \dots, e_n . *Матрицею інцидентності* графа G називають матрицю $M_{m \times n}$, з елементами

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо ребро } e_j \text{ інцидентно вершині } v_i, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Кратні ребра відповідають однаковим стовпцям матриці, а петлі відповідає стовпець з точно однією 1.

Приміром псевдографу G на рис. 9.20 відповідає матриця інцидентності

$$\begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

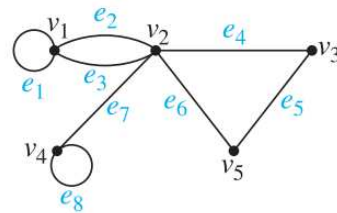


Рис. 9.20

5. Степінь вершини дорівнює сумі елементів рядка, позначеного цієї вершиною, оскільки кожна одиниця в цьому рядку представляє інцидентність цієї вершини ребру. У кожному стовпці також будують дві одиниці, оскільки кожне ребро інцидентно двом вершинам.

9.7. Шляхи у графі

1. Розгляньмо неорієнтований граф G і натуральне число n .

Шляхом завдовжки n з вершини u у вершину v у графі G називають сукупність з n ребер e_1, \dots, e_n графа G , для якої існує послідовність $x_0 = u, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = v$ вершин, так що ребро e_i має кінці у вершинах x_{i-1} та x_i .

Якщо граф простий, шлях можна позначити послідовністю вершин $x_0 x_1 \dots x_n$. Шлях ненульової довжини називають *циклом*, якщо він почина-

ється і закінчується в тій самій вершині. Кажуть, що шлях або цикл *проходить через* вершини x_1, x_2, \dots, x_{n-1} або *обходить ребра* e_1, e_2, \dots, e_n . Шлях або цикл називають *простим*, якщо він не містить те саме ребро більше, ніж один раз.

Приміром, у простому графі на рис. 9.21

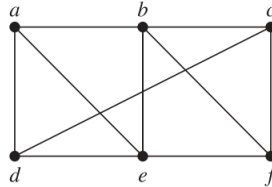


Рис. 9.21

a, d, c, f, e є простим шляхом завдовжки 4. d, e, c, a не є шляхом, оскільки не існує ребра $\{e, c\}$. b, c, f, e, b є ланцюгом завдовжки 4. Шлях a, b, e, d, a, b завдовжки 5, не є простим, оскільки містить ребро $\{a, b\}$ двічі.

2. Зв'язність. Неорієнтований граф називають *зв'язним*, якщо існує шлях між будь-якою парою різних вершин графа.

Приміром, на рис. 9.22 граф G_1 зв'язний, а граф G_2 незв'язний.

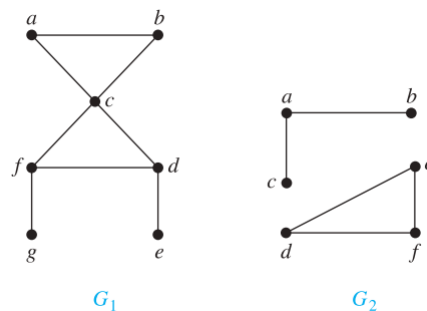


Рис. 9.22

Теорема 9.4.

Між будь-якою парою різних вершин зв'язного неорієнтованого графа існує простий шлях.

Зв'язною компонентою графа G називають його зв'язний підграф G' , що не є властивим підграфом іншого зв'язного підграфа G'' графа G . Отже, зв'язна компонента графа G є максимальним зв'язним підграфом графа G . Незв'язний граф G є об'єднанням двох або більше своїх неперетинних зв'язних компонент.

Приміром, на рис. 9.23 граф H є об'єднанням неперетинних зв'язних підграфів H_1, H_2, H_3 , які є зв'язними компонентами графа H .

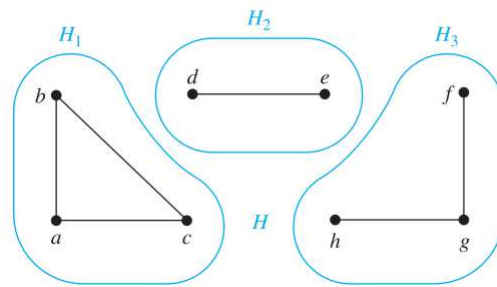


Рис. 9.23

3. Ойлерові шляхи. *Ойлеровим шляхом* у графі називають простий шлях, який містить усі ребра графа. *Ойлеровим циклом* у графі називають простий ланцюг, який містить усі ребра графа.

Приміром, на рис. 9.24 граф G_1 має Ойлерів цикл, скажімо a, e, c, d, e, b, a . Жоден із графів G_2 та G_3 не має Ойлерового циклу. Граф G_3 має Ойлерів шлях, а саме, a, c, d, e, b, d, a, b . Граф G_2 не має Ойлерового шляху.

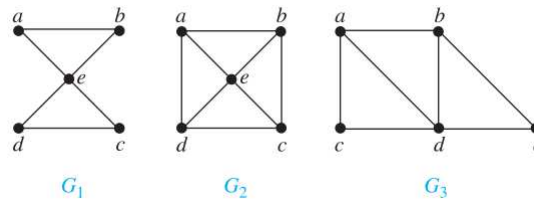


Рис. 9.24

Теорема 9.5.

Зв'язний мультиграф з більш, ніж однієї вершиною, має Ойлерів цикл тоді й лише тоді, коли кожна вершина має парну степінь.

Важливим є випадок, коли Ойлерів шлях не є Ойлеровим циклом. Такий шлях називають властивим Ойлеровим шляхом.

Теорема 9.6.

Зв'язний мультиграф має властивий Ойлерів шлях тоді й лише тоді, коли він має точно дві вершини непарного степеня.

Приміром, граф G_1 на рис. 9.25 має точно дві вершини непарного степеня, а саме, b та d , які і є кінцями Ойлерового шляху: d, a, b, c, d, b . Так само, G_2 має точно дві вершини, b та d непарного степеня, і один із Ойлерових шляхів такий: $b, a, g, f, e, d, c, g, b, c, f, d$. Граф G_3 не має Ойлерового шляху, тому що має шість вершин непарного степеня.

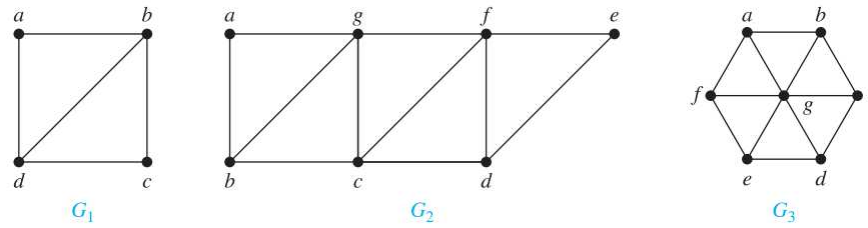


Рис. 9.25

4. Гамілтонові шляхи. Простий шлях у графі G , що проходить через кожну вершину лише один раз називають *Гамілтоновим шляхом*, а простий цикл у графі G , що проходить через кожну вершину лише один раз називають *Гамілтоновим циклом*.

Приміром, у графі G_1 на рис. 9.26 існує Гамілтоновий цикл: a, b, c, d, e, a . У графі G_2 не існує Гамілтонового циклу, оскільки будь-який ланцюг повинний містити двічі ребро $\{a, b\}$, але у графі G є Гамілтоновий шлях: a, b, c, d . У графі G_3 не існує Гамілтонового шляху.

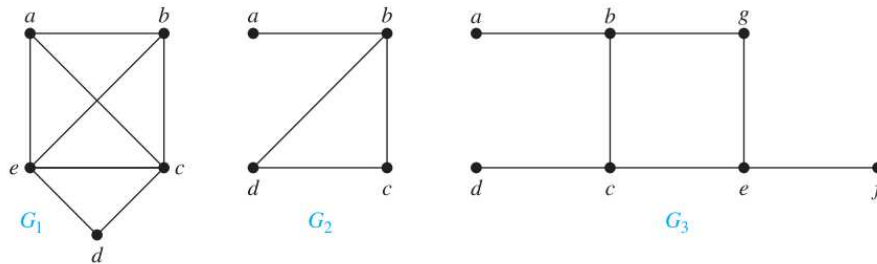


Рис. 9.26

Теорема 9.7 (Дірака).

Якщо G є простим графом з $n \geq 3$ вершинами, такими що степінь кожної вершини в G принаймні $\frac{n}{2}$, то у графі G існує Гамілтонів цикл.

Теорема 9.8 (Оре).

Якщо G є простим графом з $n \geq 3$ вершинами, таким що $\deg u + \deg v \geq n$ для будь-якої пари несуміжних вершин u та v , то у графі G є Гамілтонів цикл.