ЛЕКЦІЯ 10. ОРІЄНТОВАНІ ГРАФИ

10.1. Основні поняття
10.2. Вершини й ребра орієнтованого графа
10.3. Способи представлення графів
10.4. Шляхи в орієнтованому графі

Раніше графи були використано для зображення відношень. Однак теорія графів маю власну проблематику і є важливим розділом математики.

10.1. Основні поняття

1. Сформулюємо означення орієнтованого графа.

Означення 10.1 (орієнтованого графа).

Орієнтованим графом $G = (V, E)$ називають сукупність двох множин — непорожньої множини вершин V і множини *орієнтованих ребер* (*дуг*) E. Кожне ребро з'єднує (зв'язує) упорядковану пару вершин. Кажуть, що дуга зв'язана з упорядкованою парою вершин (u, v), починається у вершині u і закінчується у вершині v.

Напрям дуги на рисунку вказують стрілкою.

Орієнтований граф може мати петлі і кратні дуги, а також дуги, що з'єднують вершини u та v в обох напрямах (рис. 10.1).

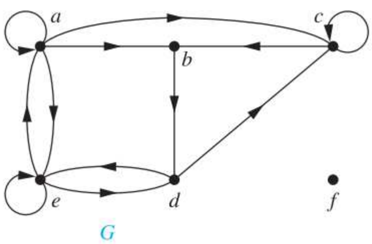


Рис. 10.1

2. Орієнтований граф без петель, кожна пара різних вершин, якого з'єднана дугою називають *турніром* (рис. 10.2).

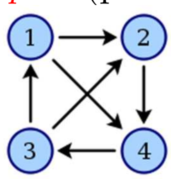


Рис. 10.2

10.2. Вершини й ребра орієнтованого графа

1. Суміжність та інцидентність. Якщо (u, v) дуга орієнтованого графа G, то кажуть, що вершина u *суміжна до* v, а вершина v *суміжна від* u; вершини *інцидентні* дузі (u, v). Вершину u називають *початком*, а вершину v — *кінцем* дуги (u, v). Для петлі початок і кінець зливаються.

2. Степені вершин. В орієнтованому графі *степенем виходу* вершини v називають кількість дуг, які закінчуються у вершині v, і позначають $\operatorname{outdeg} v$. *Степенем входу* вершини v називають кількість дуг, які починаються у вершині v, і позначають $\operatorname{indeg} v$. Петля додає одиницю до обох степенів вершини.

Якщо $\operatorname{indeg} v = 0$, то вершину v називають *джерелом*. Якщо $\operatorname{outdeg} v = 0$, то вершину v називають *стоком*.

Приміром, для графа G на рис. 10.1 маємо:

$$\operatorname{outdeg} a = 4, \operatorname{outdeg} b = 1, \operatorname{outdeg} c = 2, \operatorname{outdeg} d = 2,$$
$$\operatorname{outdeg} e = 3, \operatorname{outdeg} f = 0,$$
$$\operatorname{indeg} a = 2, \operatorname{indeg} b = 2, \operatorname{indeg} c = 3, \operatorname{indeg} d = 2,$$
$$\operatorname{indeg} e = 3, \operatorname{indeg} f = 0.$$

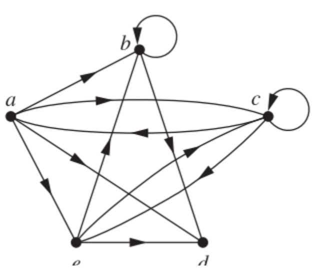
Теорема 10.1.

Нехай $G = (V, E)$ — орієнтований граф. Тоді
$$\sum_{v \in V} \operatorname{indeg} v = \sum_{v \in V} \operatorname{outdeg} v = n(E).$$

10.3. Способи представлення графів

1. Список суміжності. Орієнтований граф можна представити *списком суміжності* кінців дуг, які виходять з кожної вершини графа.

Приміром, для графа на рис. 10.3



Initial Vertex	*Terminal Vertices*
a	*b, c, d, e*
b	*b, d*
c	*a, c, e*
d	
e	*b, c, d*

Рис. 10.3

2. Матриця суміжності. Нехай $G=(V,E), n(V)=n,$ — орієнтовани граф із занумерованими вершинами $v_1, v_2, \dots, v_n$. *Матрицею суміжності* графа G називають матрицею $A_{n\times n}$ з елементами:

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & (v_i,v_j)\in E,\\ 0, & \text{інакше.}\end{cases}$$

Матриця орієнтованого графа вже не обов'язково є симетричною. Для орієнтованого мультиграфа

$$a_{ij}=\begin{cases}\text{кількість ребер, зв'язаних з парою } (v_i,v_j), & \text{якщо } (v_i,v_j)\in E\\ 0, & \text{інакше.}\end{cases}$$

3. Приміром орієнтований граф G на рис. 10.4, з нумерацією дуг

$$e_1=(v_1,v_3), e_2(v_3,v_2), e_3=(v_3,v_4), e_4=(v_4,v_2),$$

має таку матрицю суміжності:

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

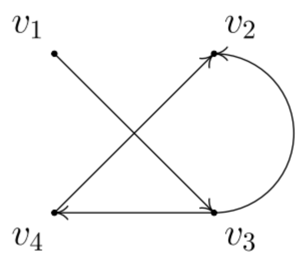


Рис. 10.4

4. Матриця інцидентності. Нехай $G=(V,E)$ — орієнтований граф з вершинами $v_1, v_2, \dots, v_m$ та ребрами $e_1, e_2, \dots, e_n$. *Матрицею інцидетності* графа G називають матрицю $M_{m\times n}$, з елементами

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & \text{якщо вершина } v_i \text{ є кінцем дуги } e_j,\\ -1 & \text{якщо вершина } v_i \text{ є початком дуги } e_j,\\ 0, & \text{якщо вершина } v_i \text{ не інцидентна дузі } e_j.\end{cases}$$

Кратні ребра відповідають однаковим стовпцям матриці, а петлі відповідає стовпець з точно однією 1.

Приміром, орієнтованому граф на рис. 10.4 має таку матрицю інцидентності

$$M=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&1\\1&-1&-1&0\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

10.4. Шляхи в орієнтованому графі

1. Розгляньмо орієнтований граф G і натуральне число n.

Шляхом завдовжки n з вершини u у вершину v у графі G називають сукупність з n ребер $e_1,\ldots,e_n$ графа G, для якої ребро e_1 зв'язано з $(x_0,x_1), e_2$ зв'язано з $(x_1,x_2),\ldots,e_n$ зв'язано з (x_{n-1},x_n), де $x_0 = u, x_n = v$.

Якщо граф простий, шлях можна позначити послідовністю вершин $x_0x_1\ldots x_n$. Шлях ненульової довжини називають *циклом*, якщо він починається і закінчується у тій самій вершині. Кажуть, що шлях або ланцюг *проходить через* вершини $x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}$ або *обходить ребра* $e_1,e_2,\ldots,e_n$. Шлях або цикл називають *простим*, якщо він не містить те саме ребро більше, ніж один раз.

2. Зв'язність. Орієнтований граф називають *сильно зв'язним*, якщо для будь-яких двох вершин u та v існує шлях від u до v та від v до u.

Орієнтований граф називають *слабко зв'язаним*, якщо є зв'язним неорієнтований граф, одержаний з нього заміною дуг на неорієнтовані ребра.

Сильно зв'язний граф є також слабко зв'язним.

Приміром, на рис. 10.5 граф G сильно зв'язний, а граф H є лише слабко зв'язним (не існує орієнтованого шляху від a до b).

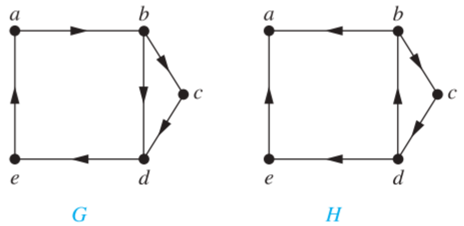


Рис. 10.5

3. *Сильно зв'язною компонентою* або сильною компонентою орієнтованого графа G називають його сильно зв'язний підграф G', що не є властивим підграфом іншого сильно зв'язного підграфа G'' графа G. Отже, зв'язна компонента графа G є максимальним сильно зв'язним підграфом графа G.

Якщо u та v є вершинами орієнтованого графа, їхні сильні компоненти або ті самі, або не перетинаються.

Приміром, граф H на рис. 10.4 має три сильно зв'язні компоненти, які складаються з вершини a, вершини e, підграф, який складається з вершин b,c та d і ребер $(b,c),(c,d)$ та (d,b).

4. Ойлерові шляхи. *Ойлеровим шляхом* в орієнтованому графі називають простий орієнтований шлях, який містить усі ребра графа. Ойлеровим циклом в орієнтованому графі називають простий цикл, який містить усі ребра графа.

Приміром, на рис. 10.6 граф H_2 має Ойлерів цикл, скажімо a,g,c,b,g,e,d,f,a. Жоден із графів H_1 та H_3 не має Ойлерового циклу. Граф H_3 має Ойлерів шлях, а саме, c,a,b,c,d,b. Граф H_1 не має Ойлерового шляху.

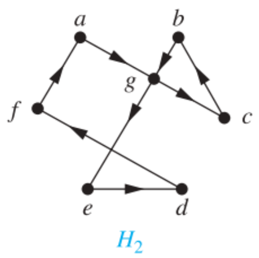


Рис. 10.6

4. Гамільтонові шляхи. Будь-який турнір зі скінченною кількістю вершин містить гамільтонів шлях, тобто орієнтований шлях, який містить усі n вершин.

Будь-який сильно зв'язний турнір має гамільтонів цикл.