

Лекція 6. Постоптимальний аналіз

6.1. Умови доповняльної нежорсткості

Розглядається пара двоїстих задач

$$\begin{aligned}
 Z(x) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max & F(y) &= \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min \\
 \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad i = \overline{1, m}, & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i &\geq c_j, \quad j = \overline{1, n}, \\
 x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, n}. & y_i &\geq 0, \quad i = \overline{1, m}.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Теорема 6.1.

(Друга теорема двоїстості).

Для того, щоб допустимі розв'язки $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, $y^* = (y_1^*, \dots, y_m^*)$ були оптимальними розв'язками пари двоїстих задач, необхідно і достатньо, щоб виконувались рівності:

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0, \quad j = \overline{1, n}, \tag{6.2}$$

$$y_i^* \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, \quad i = \overline{1, m}. \tag{6.3}$$

$\triangle \Rightarrow$ Нехай $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ і $y^* = (y_1^*, \dots, y_m^*)$ - оптимальні плани пари двоїстих задач (6.1).

1. Покажемо, що виконуються рівності (6.2). Підставимо ці розв'язки в системи обмежень відповідних задач, одержимо

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* \leq b_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* \geq c_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Кожне обмеження помножимо на відповідну змінну двоїстої задачі і просумуємо:

$$\sum_{i=1}^m y_i^* \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i^* \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* y_i^* \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i^* = F(y^*).$$

$$\sum_{j=1}^n x_j^* \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* \geq \sum_{j=1}^n c_j x_j^* \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* y_i^* \geq \sum_{j=1}^n c_j x_j^* = Z(x^*).$$

Звідси $Z(x^*) = \sum_{j=1}^n c_j x_j^* \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* y_i^* \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i^* = F(y^*)$, а оскільки

x^* і y^* оптимальні, то

$$Z(x^*) = \sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* y_i^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^* = F(y^*).$$

Звідси

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* y_i^* \Rightarrow \sum_{j=1}^n x_j^* \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0.$$

Оскільки $x_j^* \geq 0 \forall j$ і $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* \geq c_j$, а отже і $x_j^* \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j \right) \geq 0 \forall j$, то

кожен доданок дорівнює нулеві, тобто

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0, j = \overline{1, n}.$$

Аналогічно доводиться рівність (6.3).

☐ Нехай рівності (6.2) і (6.3) виконуються. Доведемо, що x^* і y^* оптимальні плани. Знайдемо суму кожної групи даних рівностей.

$$\sum_{j=1}^n x_j^* \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* y_i^* = \sum_{j=1}^n c_j x_j^* = Z(x^*),$$

$$\sum_{i=1}^m y_i^* \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* y_i^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^* = F(y^*).$$

Отже, $Z(x^*) = F(y^*) \Rightarrow x^*$ і y^* оптимальні плани. ▲

Зауваження 6.1.

1. Умови (6.2) і (6.3) називаються **умовами доповняльної нежорсткості**.

2. Якщо при підстановці оптимального розв'язку в систему обмежень i -е обмеження прямої задачі виконується як строга нерівність, то i -а координата оптимального плану двоїстої задачі дорівнює нулеві і навпаки, якщо i -а координата оптимального плану двоїстої задачі додатна, то i -е обмеження прямої задачі задовольняється оптимальним розв'язком як рівність, тобто

якщо $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^* < b_i$, то $y_i^* = 0$;

якщо $y_i^* > 0$, то $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^* = b_i$.

Економічний зміст другої теореми двоїстості.

Якщо за деяким оптимальним планом x^* виробництва витрати i -го ресурсу строго менше запасу b_i , то в оптимальному плані відповідна двоїста оцінка одиниці цього ресурсу дорівнює нулеві. Якщо в деякому оптимальному плані оцінок його i -а компонента додатна, то в оптимальному плані виробництва витрата відповідного ресурсу дорівнює його запасу.

Висновок. Двоїсті оцінки можуть слугувати мірою дефіцитності ресурсів. Дефіцитний ресурс (що повністю використовується по оптимальному плану виробництва) має додатну оцінку, а ресурс надлишковий (що використовується не повністю) має нульову оцінку.

6.2. Третя теорема двоїстості

Оптимальний розв'язок ЗЛП суттєво залежить від реальної економічної ситуації на підприємстві. На розв'язок впливають наступні економічні ситуації:

- 1) Змінення запасів ресурсів;
- 2) Зміни цінової політики на підприємстві;
- 3) Планування випуску нової продукції;
- 4) Запровадження нового технологічного способу виробництва, що дозволяє знизити витрати сировини.

Результати впливу даних економічної ситуації на оптимальний план можна одержати в результаті проведення економіко-математичного аналізу моделі на чутливість (постооптимальний аналіз).

Нехай ЗЛП має невироджений оптимальний план. Максимальне значення цільової функції $Z(x)$ залежить від вільних членів системи обмежень, тому можна вважати, що $Z_{\max} = Z_{\max}(b_1, \dots, b_m)$.

Теорема 6.2.

(Третя теорема двоїстості).

Оптимальні двоїсті оцінки y_i^* двоїстої задачі є оцінками впливу змінення вільних членів системи обмежень прямої задачі на максимальне значення її цільової функції:

$$\frac{\partial Z(x^*)}{\partial b_i} = y_i^*, \quad i = \overline{1, m}.$$

△ Нехай задана ЗЛП

$$Z(x) \rightarrow \max, \tag{6.4}$$

$$\varphi_i(x) = b_i, i = \overline{1, m}. \quad (6.5)$$

Перейдемо від задачі знаходження умовного екстремуму до безумовного. Побудуємо функцію Лагранжа:

$$L(x, y) = Z(x) + \sum_{i=1}^m y_i (b_i - \varphi_i(x)), \quad (6.6)$$

де y_i - множники Лагранжа.

Необхідні умови екстремуму:

$$\frac{\partial L(x, y)}{\partial x_j} = \frac{\partial Z(x)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m y_i \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j} = 0, j = \overline{1, n} \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial L(x, y)}{\partial y_i} = b_i - \varphi_i(x) = 0, i = \overline{1, m}. \quad (6.8)$$

Кожне екстремальне значення задачі (6.4), (6.5) задовольняє умовам (6.7), (6.8).

Дійсно, нехай x^* - допустимий план, що доставляє екстремум функції цілі, оскільки x^* - допустимий, то $\varphi_i(x^*) = b_i$ і умови (6.8) виконуються. Отже, з (6.6):

$$L(x^*, y^*) = Z(x^*),$$

звідки

$$\frac{\partial L(x^*, y^*)}{\partial x_j} = \frac{\partial Z(x^*)}{\partial x_j} = 0.$$

Отже, умови (6.7) виконуються.

Кожна допустима точка x^* , в якій $Z(x^*)$ досягає екстремуму, повинна бути розв'язком системи (6.7), (6.8). Це необхідні умови екстремуму.

Будемо вважати, що вільні члени системи обмежень (6.5) можуть в деяких межах змінюватись. Тоді в ЗЛП поліедр планів буде змінюватись. Його межові точки стають функціями b_i і екстремальне значення функції цілі буде змінюватись. Позначимо координати крайніх точок $x^1 = x^1(b_1, \dots, b_m), \dots, x^n = x^n(b_1, \dots, b_m)$. Розглянемо тепер функцію Лагранжа як функцію від вектора b :

$$L(b) = Z(x(b)) + \sum_{i=1}^m y_i (b_i - \varphi_i(x(b))).$$

Знайдемо: (6.9)

$$\frac{\partial L(b)}{\partial b_i} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial Z}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m y_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial x_j}{\partial b_i} + \sum_{i=1}^m (b_i - \varphi_i(x, b)) \frac{\partial y_i}{\partial b_i} + y_i.$$

Враховуючи (6.7), (6.8) з (6.9) маємо:

$$\frac{\partial L(b)}{\partial b_i} = y_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Але для оптимального розв'язку

$$L(x^*, y^*) = Z(x^*) \Rightarrow \frac{\partial Z(x^*)}{\partial b_i} = y_i^*, \quad i = \overline{1, m}. \blacktriangle$$

Таким чином, $\Delta Z(x^*) \approx y_i^* \Delta b_i$; і якщо $\Delta b_i = 1$, то

$$\Delta Z(x^*) \approx y_i^*. \quad (6.10)$$

Висновок. Величина двоїстої оцінки чисельно дорівнює зміненню цільової функції при змінні відповідного вільного члену на 1.

y_i - *об'єктивно обумовлені оцінки, тіньові ціни, маргінальні оцінки ресурсів, множники Лагранжа.*

6.3. Властивості двоїстих оцінок

1. Характеризують дефіцитність ресурсу.

Якщо $y_i > 0$, то i -ий ресурс дефіцитний (чим більше значення y_i , тим дефіцитніший ресурс, обмеження активне); якщо $y_i = 0$ - ресурс недефіцитний (обмеження неактивне).

2. Показують вплив змінення правої частини обмежень на значення цільової функції.

3. Двоїсті оцінки є показником рентабельності продукції (ефективності виробництва окремих видів продукції).

Тобто, в оптимальний план може включатися тільки продукція j -го виду, для якої

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j.$$

Якщо

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i > c_j,$$

то виготовляти продукцію не вигідно (вартість всіх ресурсів, які використовуються для виробництва j -ої продукції перевищує ціну одиниці продукції c_j).

6.4. Дослідження стійкості параметрів оптимального плану

1. Змінення компонент вектора обмежень.

Будь-яке змінення вихідних даних прямої задачі може впливати як на оптимальний розв'язок, так і на систему оптимальних двоїстих оцінок. Тому визначимо інтервали змінення компонент вектора вільних членів системи лінійних обмежень, при яких оптимальний розв'язок двоїстої задачі не змінюється, тобто область стійкості оптимальних оцінок.

Нехай \tilde{x}^* - вектор базисних розв'язків не виродженої ЗЛП :
 $\tilde{x}^* = (x_{k_1}^*, \dots, x_{k_m}^*)^T$, $x_{k_i}^* > 0$, $i = \overline{1, m}$. Вектор \tilde{x}^* - частина вектора $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$. Тоді

$$\tilde{x}^* = B^{-1}b,$$

де B - базисна матриця (матриця векторів-умов, що є базисними в оптимальному плані), $b = (b_1, \dots, b_m)^T$.

$$B^{-1} = (d_{ij})_{\substack{i=\overline{1, m}, \\ j=\overline{1, m}}}, \quad \bar{b}_i = b_i + \Delta b_j.$$

Нехай

$$\bar{b} = b + \Delta b = \begin{pmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ \dots \\ b_m + \Delta b_m \end{pmatrix}.$$

Тоді, оскільки розв'язок повинен залишатися допустимим, необхідно:

$$B^{-1}(b + \Delta b) = \tilde{x}^* + B^{-1}\Delta b \geq 0.$$

В загальному випадку задача знаходження вектора Δb порівняна за трудомісткістю з розв'язанням ЗЛП з новими значеннями компонент вектора обмежень. Тому розглянемо діапазон змінення однієї компоненти вектора обмежень, коли додаткова змінна базисна або не базисна.

1) Нехай додаткова змінна небазисна, тобто дорівнює нулю (відповідний ресурс дефіцитний), тоді

$$\max_{\{d_{jj} > 0\}} \left\{ \frac{x_{k_i}^*}{-d_{ij}} \right\} \leq \Delta b_j \leq \min_{\{d_{jj} < 0\}} \left\{ \frac{x_{k_i}^*}{-d_{ij}} \right\}. \quad (6.11)$$

Якщо усі $d_{ij} \leq 0$, то $\Delta b_j > -\infty$, якщо $d_{ij} > 0$, то $\Delta b_j < \infty$.

2) Якщо додаткова змінна базисна, (відповідний ресурс недефіцитний), то

$$-x_{k_i}^* \leq \Delta b_j < \infty \quad (\text{для обмежень } \leq)$$

і

$$-\infty < \Delta b_j \leq x_{k_i}^* \quad (\text{для обмежень } \geq).$$

2. Змінення коефіцієнтів цільової функції.

1) Якщо змінна небазисна, то змінення коефіцієнтів цільової функції при ній впливає на відносну оцінку тільки цієї змінної.

Нехай $\tilde{x}^* = (x_{k_1}^*, \dots, x_{k_m}^*)^T$, $x_{k_i}^* > 0$, $i = \overline{1, m}$ - базисні розв'язки ЗЛП.

Припустимо, що x_j - небазисна змінна ($j \neq k_i, i = \overline{1, m}$) і $\bar{c}_j = c_j + \Delta c_j$.

Тоді значення цільової функції не зміниться, а симплекс-оцінка

$$\bar{\Delta}_j = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} c_{k_i} - \bar{c}_j = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} c_{k_i} - c_j - \Delta c_j = \Delta_j^* - \Delta c_j,$$

де α_{ij} - коефіцієнти розкладу вектора A_j за базисом оптимального розв'язку.

Щоб розв'язок залишався оптимальним, необхідно виконання умови

$$\bar{\Delta}_j = \Delta_j^* - \Delta c_j \geq 0.$$

Тому діапазон стійкості для коефіцієнта цільової функції:

$$-\infty < \Delta c_j \leq \Delta_j^*.$$

2) Якщо змінна базисна, то зміни в цільовій функції вплинуть на відносні оцінки усіх небазисних змінних.

Нехай змінна $x_{k_i} > 0$, $i = \overline{1, m}$ базисна і $\bar{c}_{k_i} = c_{k_i} + \Delta c_{k_i}$. Тоді для відносних оцінок маємо

$$\bar{\Delta}_j = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} (c_{k_i} + e_i \Delta c_{k_i}) - c_j = \left(\sum_{i=1}^m \alpha_{ij} c_{k_i} - c_j \right) + \alpha_{ij} \Delta c_{k_i} = \Delta_j^* + \alpha_{ij} \Delta c_{k_i},$$

де $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$.

Тоді діапазон стійкості для коефіцієнтів цільової функції знаходиться з умов

$$\bar{\Delta}_j \geq 0 \Rightarrow \Delta_j^* + \alpha_{ij} \Delta c_{k_i} \geq 0.$$

Отже,

$$\max_{\ell \alpha_{ij} > 0} \left\{ \frac{\Delta_j^*}{-\alpha_{ij}} \right\} \leq \Delta c_{k_i} \leq \min_{\ell \alpha_{ij} < 0} \left\{ \frac{\Delta_j^*}{-\alpha_{ij}} \right\}. \quad (6.12)$$

Якщо всі $\alpha_{ij} > 0$, то $\Delta c_{k_i} < +\infty$, якщо всі $\alpha_{ij} < 0$, то $\Delta c_{k_i} > -\infty$.

Змінення коефіцієнтів при базисних змінних приводить до змінення значення цільової функції $Z(x)$:

$$\bar{Z}(x) = \sum_{i=1}^m \bar{c}_{k_i} x_{k_i} = Z(x^*) + \Delta c_{k_i} x_{k_i}$$

Приклад 6.1.

Для виготовлення 4 видів продукції А, В, С, D використовується 3 види сировини 1, 2, 3. Запаси сировини, норми витрат сировини на одиницю кожного виду продукції та дохід від реалізації кожного виду продукту в таблиці. Визначити оптимальний план виробництва, який дає підприємству найбільший прибуток.

1. Побудувати математичну модель даної задачі лінійного програмування та двоїстої до неї.

2. Записати оптимальні плани прямої та двоїстої задач та здійснити їх економічний аналіз.

3. Визначити статус ресурсів прямої задачі та інтервали стійкості двоїстих оцінок відносно зміни запасів дефіцитних ресурсів.

4. Визначити план виробництва продукції та зміну загального доходу підприємства, якщо запас першого ресурсу збільшити на 10 од., другого – зменшити на 10 од., а третього – збільшити на 20 од.

5. Визначити рентабельність кожного виду продукції, що виготовляється на підприємстві.

6. Визначити межі змінення доходу від реалізації одиниці продукції кожного виду.

Ресурс	Норми витрат на одиницю продукції (в ум.од) за видами продукції				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	2	5	2	4	250
2	1	6	2	4	280
3	3	2	1	1	80
Ціна один. прод.	2	4	3	4	

Складемо пряму і двоїсту задачі.

$$Z(x) = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 250 \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 280 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 80 \end{cases} \begin{array}{l} +x_5 \\ +x_6 \\ +x_7 \end{array} \begin{array}{l} | \\ | \\ | \end{array} \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$$

$$F(y) = 250y_1 + 280y_2 + 80y_3$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 2 \\ 5y_1 + 6y_2 + 2y_3 \geq 4 \\ 2y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3 \\ 4y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 4 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array}$$

Остання симплекс-таблиця має вигляд

Базис	Сб	A0	2	4	3	4	0	0	0
			A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
A4	4	45	-2	1/2	0	1	1/2	0	-1
A6	0	30	-1	1	0	0	-1	1	0
A3	3	35	5	3/2	1	0	-1/2	0	2
Δ_j		285	5	5/2	0	0	1/2	0	2

$$y_1 \quad y_2 \quad y_3$$

$$\tilde{x}^* = (0; 0; 35; 45; 0; 30; 0), \quad x^* = (0; 0; 35; 45), \quad Z_{\max} = Z(x^*) = 285$$

$$y^* = \left(\frac{1}{2}; 0; 2\right), \quad F_{\min} = F(y^*) = \frac{1}{2} \cdot 250 + 2 \cdot 80 = 285$$

Оптимальний план передбачає випуск тільки продукції С і D.

Для А, В $x_1 = x_2 = 0$

3. Статус ресурсу можна визначити 3 способами:

1) Підставимо x^* в систему обмежень прямої задачі

$$2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 35 + 4 \cdot 45 = 250 \quad \text{- дефіцитний}$$

$$1 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 2 \cdot 35 + 4 \cdot 45 = 250 < 280 \quad \text{- недефіцитний}$$

$$3 \cdot 0 + 22 \cdot 0 + 1 \cdot 35 + 1 \cdot 45 = 80 \quad \text{- дефіцитний}$$

2) За допомогою додаткових змінних

$$x_5^* = x_7^* = 0 \Rightarrow \text{дефіцитні}$$

$$x_6^* = 30 \Rightarrow \text{недефіцитний}$$

3) За допомогою y_i^* :

$$y_1^* = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ресурс 1 дефіцитний}$$

$$y_2^* = 0 \Rightarrow \text{2 недефіцитний}$$

$$y_3^* = 2 \Rightarrow \text{ресурс 3 дефіцитний}$$

$$y_1^* < y_3^* \Rightarrow \text{ресурс 1 менш дефіцитний}$$

$$\Delta Z_{\max} = y_i \Delta b_j.$$

Якщо $\Delta b_1 = 1 \Rightarrow \bar{b}_1 = 250 + 1 = 251$, то $\Delta Z = 1/2$ ум. од. $\Rightarrow Z_{\max} = 285,5$.

Але за рахунок чого?

Стовпчик A_5 в останній таблиці: x_4^* збільшиться на $1/2$, x_6^* зменшиться на 1 , x_3^* - зменшиться на $1/2$.

Структура плану не зміниться, але

$\tilde{x}^* = (0; 0; 34,5; 45,5; 0; 29; 0)$, отже зросте випуск продукції D, спадання продукції C. Обсяг використання ресурсу 2 (недефіцитного) збільшиться.
 $1 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 2 \cdot 34,5 + 4 \cdot 45,5 = 251 > 250$.

Якщо $\Delta b_3 = 1 \Rightarrow \bar{b}_3 = 80 + 1 = 81$, $y_3^* = 2 \Rightarrow \Delta Z = 2 \Rightarrow Z_{\max} = 287$

$\tilde{x}^* = (0; 0; 37; 44; 0; 30; 0)$.

Знайдемо інтервал стійкості y_i .

Знайдемо діапазон зміни ресурсів, що не змінює оптимального плану двоїстої задачі.

$$\begin{array}{r}
 b_1 \quad b_2 \quad b_3 \\
 A_3 \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 2 \\ 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} x_3^* = 35 \\ x_4^* = 45 \\ x_6^* = 30 \end{array} \\
 B^{-1} = A_4 \\
 A_6 \\
 -90 = \max_{i, (d_{ij} > 0)} \left\{ -\frac{x_{k_i}^*}{d_{ij}} \right\} = \max_{i, (d_{ij} > 0)} \left\{ -\frac{45}{1/2} \right\} \leq \Delta b_1 \leq \\
 \leq \min_{i, (d_{ij} < 0)} \left\{ -\frac{x_{k_i}^*}{d_{ij}} \right\} = \min_{i, (d_{ij} < 0)} \left\{ -\frac{35}{-1/2}; -\frac{30}{-1} \right\} = 30 \\
 -90 \leq \Delta b_1 \leq 30
 \end{array}$$

$$160 = 250 - 90 \leq b_1 \leq 250 + 30 = 280 \Rightarrow 160 \leq b_1 \leq 280$$

$$240 = 285 - 90 \cdot \frac{1}{2} \leq Z_{\max} \leq 285 + 30 \cdot \frac{1}{2} = 300$$

$$x_1^* = \left(0; 0; 35 - \frac{1}{2} \Delta b_1; 45 + \frac{1}{2} \Delta b_1; 0; 30 - \Delta b_1; 0 \right) \Rightarrow$$

$$(0; 0; 80; 0; 0; 120; 0) \leq x_1^* \leq (0; 0; 20; 60; 0; 0; 0)$$

Аналогічно,

$$-17,5 \leq \Delta b_3 \leq 45 \Rightarrow 62,5 \leq b_3 \leq 125$$

$$250 = 285 - 2 \cdot 17,5 \leq Z_{\max} \leq 285 + 2 \cdot 45 = 375$$

Ресурс 2 (b_2) недефіцитний,

$$-30 \leq \Delta b_2 < +\infty \Rightarrow 250 \leq b_2 < +\infty.$$

4. За умовою задачі $\Delta b_1 = 10, \Delta b_2 = -10, \Delta b_3 = 20$

$$x^* = D^{-1}\bar{A}_0, \quad \bar{A}_0 = \begin{pmatrix} 250 + 10 \\ 280 - 10 \\ 80 + 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 260 \\ 270 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$x^* = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 2 \\ 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 260 \\ 270 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 70 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x}^* = (0; 0; 70; 30; 0; 10; 0)^T$$

Усі $x_j \geq 0 \Rightarrow y^* = (1/2; 0; 2)$ залишаються.

$$\Delta Z_{\max} = y_1 \Delta b_1 + y_2 \Delta b_2 + y_3 \Delta b_3 = 10 \cdot \frac{1}{2} + 20 \cdot 2 = 45$$

$$Z_{\max} = 285 + 45 = 330$$

5. Оцінка рентабельності продукції.

Підставимо Y^* в систему обмежень двоїстої задачі, якщо

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i > c_j, \text{ то не рентабельно.}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 7 > 2 \text{ (A нерентабельна)}$$

$$5 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 6,5 > 4 \text{ (B нерентабельна)}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 3 \text{ (C рентабельна)}$$

$$4 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 4 \text{ (D рентабельна)}$$

6. Знайдемо межі змінення доходу від реалізації одиниці продукції кожного виду, при яких оптимальний розв'язок не змінюється.

x_1, x_2 – небазисні, x_3, x_4 – базисні.

Для x_1, x_2

$$-\infty < \Delta c_1 \leq 5, \quad -\infty < \Delta c_2 \leq \frac{5}{2}.$$

Для x_3 :

$$\bar{\Delta}_1^* = 5 + 5\Delta c_3 \geq 0, \quad \bar{\Delta}_2^* = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\Delta c_3 \geq 0,$$

$$\bar{\Delta}_5^* = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Delta c_3 \geq 0, \quad \bar{\Delta}_7^* = 2 + 2\Delta c_3 \geq 0$$

$$\Rightarrow \max_{j(\alpha_{jj}>0)} \left\{ -\frac{5}{5}; -\frac{5/2}{3/2}; -\frac{2}{2} \right\} \leq \Delta c_3 \leq \min_{j(\alpha_{jj}<0)} \left\{ -\frac{1/2}{-1/2} \right\} \Rightarrow -1 \leq \Delta c_3 \leq 1.$$

Для x_4 :

$$\Rightarrow \max_{j(\alpha_{jj}>0)} \left\{ -\frac{5/2}{1/2}; -\frac{1/2}{1/2} \right\} \leq \Delta c_4 \leq \min_{j(\alpha_{jj}<0)} \left\{ -\frac{5}{-2}; -\frac{2}{-1} \right\} \Rightarrow -1 \leq \Delta c_4 \leq 2.$$

6.5. Лема Фаркаша

Теорію двоїстості можна вивчати різними способами. Використання симплекс-методу для доведень хоча і є конструктивним (вказано способи знаходження оптимальних планів обох задач – прямої і двоїстої), але є досить громіздким. Розглянемо інший підхід, який використовує геометричні міркування.

Теорема 6.3.

(Лема Фаркаша).

Або має розв'язок система

$$Ax = b, x \geq 0, \quad (6.13)$$

або існує розв'язок системи

$$y^T A \geq 0, y^T b < 0. \quad (6.14)$$

Δ 1) Нехай обидві задачі мають розв'язки.

Тоді

$$Ax = b, x \geq 0 \text{ і } \exists y : y^T A \geq 0.$$

Маємо

$$0 > y^T b = \underbrace{y^T A}_{\geq 0} \underbrace{x}_{\geq 0} \geq 0.$$

Суперечність, отже, задача (6.14) розв'язку не має.

2) Нехай обидві задачі не мають розв'язку.

Множина

$$\{Ax, x \geq 0\} = \left\{ \sum_{j=1}^n x_j A_j, x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \right\} \text{ замкнена.}$$

$$Ax \neq b \Rightarrow \|Ax - b\|^2 > 0.$$

Функція $f(x) = \|Ax - b\|^2$ опукла, тоді для існування мінімуму функції

$\forall j$:

$$\text{якщо } x_j > 0 \Rightarrow \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0, \text{ якщо } x_j = 0 \Rightarrow \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \geq 0.$$

Тобто $\forall j$:

$$\begin{cases} x_j > 0, \langle Ax - b, A_j \rangle = 0; \\ x_j = 0, \langle Ax - b, A_j \rangle \geq 0. \end{cases} \quad (6.15)$$

Нехай $y = Ax - b$, з (6.15) випливає, що

$$\langle y, A_j \rangle \geq 0 \quad \forall j = \overline{1, n} \Rightarrow y^T A \geq 0.$$

Тоді

$$\begin{aligned} y^T b &= \langle y, b \rangle = \langle Ax - b, b \rangle = \langle Ax - b, b - Ax \rangle + \langle Ax - b, Ax \rangle = \\ &= -\|Ax - b\|^2 + \sum_{j=1}^n \underbrace{x_j \langle Ax - b, A_j \rangle}_{=0} = -\|Ax - b\|^2 < 0. \end{aligned}$$

Суперечність, тобто задача (6.14) розв'язку не має. \blacktriangle

Теорема 6.3 має зрозумілий геометричний зміст, що демонструє загальний принцип теорем про альтернативи.

Якщо система (6.13) несумісна, тобто вектор b не є лінійною комбінацією векторів-стовпців A_j матриці A з невід'ємними коефіцієнтами, то існує така гіперплощина H , яка проходить через нуль, що вектори A_j лежать в додатному півпросторі, утвореному цією гіперплощиною, а вектор b - у внутрішній частині від'ємного півпростору (рис. 6.1).

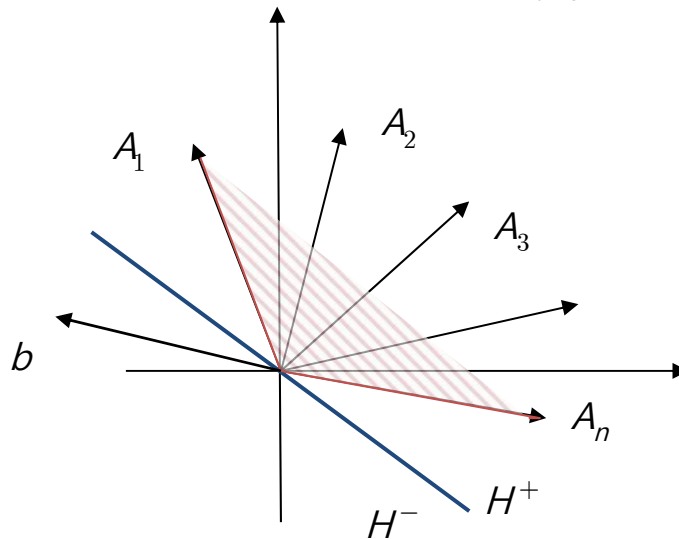


Рис. 6.1.