Лекція 5. Теорія двоїстості.

5.1. Типи математичних моделей двоїстих задач

Будь-якій задачі лінійного програмування можна поставити у відповідність іншу задачу, яка називається *двоїстою* або *спряженою*. Обидві задачі складають пару двоїстих задач лінійного програмування.

Приклад 5.1. *(Оптимальне використання сировини)*. Нехай є m видів сировини в кількості $b_1,\dots,b_m$, які використовують для n видів продукції. Відомо: a_{ij} - витрати i-го виду сировини на одиницю j-ої продукції; c_j - прибуток від реалізації одиниці j-го виду продукції. Скласти план випуску продукції, що забезпечує максимальний прибуток.

Нехай x_j - обсяг випуску j-ої продукції, що забезпечує максимальний прибуток. Математична модель даної задачі має вигляд:

$$Z(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i=\overline{1,m},$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}.$$

Нехай інший виробник хоче перекупити сировину. Складемо двоїсту задачу, розв‘язок якої дозволить визначити умови продажу сировини. Необхідно встановити оцінки (ціни) видів сировини $y=(y_1,\dots,y_m)^T$. Оцінки встановлюємо виходячи з вимог, що відображують різні інтереси двох виробників:

1) Загальні витрати на придбання сировини другий виробник намагається мінімізувати.

2) Перший виробник згоден продати сировину по цінах, при яких сумарна вартість усіх видів сировини, що витрачається на кожен виріб j-ої продукції не менша прибутку c_j, що одержується при реалізації цього виробу.

Тобто, математична модель умов продажу сировини:

$$F(y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j,\ j=\overline{1,n},$$

$$y_i \ge 0,\ i=\overline{1,m}.$$

Змінні $y_i,\ i=\overline{1,m}$ називаються *двоїстими оцінками* (*тіньовими цінами, множниками Лагранжа*).

Розглянута пара задач відноситься до симетричних двоїстих задач (канонічні ЗЛП), тобто симетричні двоїсті задачі:

$$Z(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad F(y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i=\overline{1,m}, \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j,\ j=\overline{1,n},$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}. \qquad y_i \ge 0,\ i=\overline{1,m}.$$

В теорії двоїстості розглядають чотири пари двоїстих задач, наведемо їх в матричній формі.

Симетричні пари:

1.

$$Z(x)=c^T x \to \max \qquad F(y)=y^T b \to \min$$

$$Ax \le b, \qquad y^T A \ge c^T,$$

$$x \ge 0; \qquad y^T \ge 0;$$

2.

$$Z(x)=c^T x \to \min \qquad F(y)=y^T b \to \max$$

$$Ax \ge b, \qquad y^T A \le c^T,$$

$$x \ge 0; \qquad y^T \ge 0.$$

Нехай задано ЗЛП:

$$Z(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i=\overline{1,m},$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}.$$

Запишемо рівняння-обмеження у вигляді системи

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i,\ i = \overline{1, m}.$$

Помножимо другу нерівність на -1:

$$Z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{1, m},$$

$$\sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}) x_j \le -b_i,\ i = \overline{1, m},$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n}.$$

Введемо двоїсті змінні y_i' і y_i'', тоді

$$F(y', y'') = \sum_{i=1}^{m} b_i (y_i' - y_i'') \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} (y_i' - y_i'') \ge c_j,\ j = \overline{1, n}$$

$$y_i' \ge 0,\ y'' \ge 0,\ i = \overline{1, m}.$$

Покладемо $y_i' - y_i'' = y_i$:

$$F(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j,\ j = \overline{1, n},$$

y_i - довільного знаку.

Несиметричні пари:

3.
$$Z(x) = c^T x \to \max \qquad Ax = b, \qquad x \ge 0;$$
$$F(y) = y^T b \to \min \qquad y^T A \ge c^T;$$

4.
$$Z(x) = c^T x \to \min \qquad Ax = b, \qquad x \ge 0;$$
$$F(y) = y^T b \to \max \qquad y^T A \le c^T,$$

де

$$c=\left(c_1,\ldots,c_n\right)^T,\ y=\left(y_1,\ldots,y_m\right)^T,\ x=\left(x_1,\ldots,x_n\right)^T,\ b=\left(b_1,\ldots,b_m\right)^T,$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

5.2. Правила складання двоїстих задач

1. Якщо в початковій задачі $Z(x)\to\max$, то всі знаки нерівностей в обмеженнях повинні бути «$\le$», якщо $Z(x)\to\min$, то – «$\ge$».

2. Кожному обмеженню вихідної задачі відповідає невідоме в двоїстій задачі. При цьому, невідоме, що відповідає обмеженню-нерівності повинно задовольняти умові невід‘ємності, а невідоме, що відповідає обмеженню-рівності довільного знаку.

3. Цільова функція двоїстої задачі має вигляд

$$F(y)=c_0+\sum_{i=1}^{n} b_i y_i,$$

де c_0 – вільний член цільової функції $Z(x)$ вихідної задачі, $b_i,\ i=\overline{1,m}$ – вільні члени в обмеженнях вихідної задачі.

4. Якщо $Z(x)\to\max$, то $F(y)\to\min$; якщо $Z(x)\to\min$, то $F(y)\to\max$.

5. Кожній змінній $x_j,\ j=\overline{1,n}$ вихідної задачі відповідає обмеження в двоїстій задачі. Всі обмеження двоїстої задачі мають знак «$\ge$», якщо $F(y)\to\min$ і «$\le$», якщо $F(y)\to\max$. Вільними членами системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти $c_j,\ j=\overline{1,n}$ цільової функції прямої задачі.

5.3. Перша теорема двоїстості

Існує зв‘язок між оптимальними планами двоїстих задач. Розв‘язавши одну з них можна знайти оптимальний розв‘язок іншої не розв‘язуючи її або встановити відсутність розв‘язку.

Лема 5.1. Нехай задано пару двоїстих задач

$$Z(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\to\max,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\le b_i,\ i=\overline{1,m}$$

і

$$F(y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min,\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j,\ j=\overline{1,n}.$$

Тоді $\forall x \in G_X$ і $\forall y \in G_Y$

$$Z(x) \le F(y) \qquad (5.1)$$

тобто

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i.$$

$$\triangle \ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right) x_j = \sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i. \ \blacktriangle$$

Нерівність (5.1) називається *основною нерівністю* теорії двоїстості.

Економічний зміст нерівності:

Для будь-якого плану виробництва x і для будь-якого вектора оцінок ресурсів y загальна створена вартість не перебільшує сумарної оцінки ресурсів.

Теорема 5.1. (*Перша теорема двоїстості*).

1. Якщо одна з двоїстих задач лінійного програмування має оптимальний розв‘язок, то інша також має оптимальний розв‘язок, причому оптимальні значення цільових функцій обох задач співпадають:

$$Z(x^*) = F(y^*).$$

2. Якщо цільова функція однієї з двоїстих ЗЛП необмежена на ОДР, то інша задача немає допустимих розв‘язків (несумісна система обмежень).

$\triangle$ Розглянемо пару двоїстих задач:

$$Z(x)=c^T x \to \max \qquad Z(x)=y^T b \to \min$$
$$Ax=b, \qquad y^T A \ge c^T.$$
$$x>0,$$

Припустимо, що перша (пряма) з пари задач розв‘язана симплекс-методом і знайдено оптимальний розв‘язок $x^*=\left(\alpha_{10}^*,\ldots,\alpha_{m0}^*,0,\ldots,0\right)^T$ з базисом $B=\left[A_1,\ldots,A_m\right]$. Запишемо останню симплекс таблицю.

№ ітерації	B	C_B	b	C_1	C_2	…	C_m	C_{m+1}	…	C_k	…	C_n
				A_1	A_2	…	A_m	A_{m+1}	…	A_k	…	A_n
	A_1	C_1	α_{10}^*	1	0	…	0	α_{1m+1}	…	α_{1k}	…	α_{1n}
	A_2	C_2	α_{20}^*	0	1	…	0	α_{2m+1}	…	α_{2k}	…	α_{2n}
	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

	A_m	C_m	α^*_{m0}	0	0	…	1	α_{mm+1}	…	α_{mk}	…	α_{mn}
	Δ_j		$Z(X^*)$	0	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_k	…	Δ_n

Розкладемо вектор A_k за базисом оптимального розв‘язку:

$$A_k = A_1\alpha_{1k} + A_2\alpha_{2k} + ... + A_m\alpha_{mk},\ k = 0,1,...,n$$

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix}\alpha_{1k} + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix}\alpha_{2k} + ... + \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ ... \\ a_{mm} \end{pmatrix}\alpha_{mk} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ ... \\ \alpha_{mk} \end{pmatrix}.$$

Позначимо

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mm} \end{pmatrix},\ \alpha_k = \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ ... \\ \alpha_{mk} \end{pmatrix},$$

де B - базисна матриця.

Тоді

$$A_k = B\alpha_k \Rightarrow \alpha_k = B^{-1}A_k,\ k = \overline{1,n}.$$

Аналогічно одержимо

$$b = Bx^* \Rightarrow x^* = B^{-1}b.$$

Враховуючи одержані співвідношення запишемо симплекс-оцінки $\Delta_k,\ k = \overline{0,n}$, які в загальному випадку мають вигляд

$$\Delta_k = c_B^T\alpha_k - c_k.$$

Позначимо через c^* матрицю-рядок коефіцієнтів при базисних змінних в оптимальному розв‘язку. Тоді оцінки розкладу векторів-умов за базисом оптимального плану

$$\Delta_k^* = c_B^{T*}\alpha_k - c_k = c_B^{T*}B^{-1}A_k - c_k.$$

Нехай $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$ матриця, складена з векторів α_k, Δ^* - матриця-рядок симплекс-оцінок $\Delta^* = \left(\Delta_1^*,...,\Delta_n^*\right)$, $c = (c_1,...,c_n)^T$, $A = (A_1,...,A_n)$.

Тоді

$$\alpha = B^{-1}A,\ \Delta^* = c_B^{T*}B^{-1}A - c^T.$$

1. Доведемо, що $y = c_B^{T*}B^{-1}$ - допустимий розв‘язок двоїстої задачі.

x^* - оптимальний розв‘язок прямої задачі на максимум, тому симплекс-різниці невід‘ємні:

$$\Delta^* = c_B^{T*}B^{-1}A - c^T \geq 0 \Rightarrow y^TA - c^T \geq 0 \Rightarrow y^TA \geq c^T.$$

Отже, $y = c_B^{T*} B^{-1}$ задовольняє системі обмежень двоїстої задачі. При цьому

$$Z\left(x^*\right) = c_B^{T*} x^* = c_B^{T*} B^{-1} b = y^T b = F\left(y\right).$$

Покажемо, що $y = c_B^{T*} B^{-1}$ оптимальний.

x^* - оптимальний план прямої задачі на максимум, тому

$$Z\left(x^*\right) \geq Z\left(x\right) \; \forall x \in G_X.$$

Двоїста задача на мінімум, тому

$$F\left(y^*\right) \leq F\left(y\right) \; \forall y \in G_y.$$

За лемою 5.1 $Z\left(x\right) \leq F\left(x\right) \;\; \forall x \in G_X$ і $\forall y \in G_y \;\Rightarrow F\left(y^*\right) \geq Z\left(x^*\right)$, але $Z\left(x^*\right) = F\left(y\right)$, якщо $y = c_B^{T*} B^{-1} \Rightarrow y^* = c_B^{T*} B^{-1}$ - оптимальний план двоїстої задачі і

$$Z\left(x^*\right) = F\left(y^*\right).$$

2. Нехай цільова функція прямої задачі необмежена:

$$Z\left(x\right) \to +\infty.$$

Оскільки $Z\left(x\right) \leq F\left(y\right) \forall x \in G_x$ і $\forall y \in G_y$, то $F\left(y\right) \geq +\infty$, що немає сенсу, отже $G_y = \varnothing$.▲

Зауваження 5.1. 1. Між змінними прямої і двоїстої задач можна встановити відповідність зіставляючи вільним змінним однієї задачі базисні змінні іншої, і навпаки

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & \cdots & x_{n+m} \\ \updownarrow & \updownarrow & \cdots & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots & \updownarrow \\ y_{m+1} & y_{m+2} & \cdots & y_{m+n} & y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{array}$$

2. Для знаходження оптимального плану двоїстої задачі зручно користуватись наступним співвідношенням. Розв‘язок $y^* = c_B^{T*} B^{-1}$ запишемо у вигляді

$$y^* = \left(y_1^*, \ldots, y_m^*\right) = c^*\left(X_{k_1}, \ldots, X_{k_m}\right),$$

де $B^{-1} = \left(X_{k_1}, \ldots, X_{k_m}\right)$ - обернена матриця до матриці B, складеної з векторів-умов задачі, що утворюють базис оптимального розв‘язку. Матриця B^{-1} знаходиться в останній симплекс-таблиці під одиничними векторами першої симплекс-таблиці.

Отже, $y_k^* = c_B^{T*} \alpha_k$. Оскільки $\Delta_k^* = c_B^{T*} \alpha_k - c_k$, то

$\Delta_k^* = y_k^* - c_k$ або

$$\boxed{y_k^* = \Delta_k^* + c_k}.$$

Ця формула дозволяє, використовуючи оцінки останньої симплекс-таблиці розв‘язку прямої ЗЛП записати оптимальний план двоїстої задачі як суму симплекс-оцінок і коефіцієнтів цільової функції.

Економічний зміст першої теореми двоїстості.

Якщо задача визначення оптимального плану, що максимізує випуск продукції розв‘язна, то розв‘язна і задача визначення оцінок ресурсів. План виробництва і вектор оцінок ресурсів є оптимальними тоді і тільки тоді, коли вартість виробленої продукції і сумарна оцінка ресурсів співпадають.

5.4. Двоїстий симплекс-метод.

Двоїстий симплекс метод дозволяє в результаті послідовного покращення, так званих, майже допустимих опорних розв‘язків або знайти оптимальній, або зробити висновок про його відсутність.

Розглянемо ЗЛП в канонічній формі

$$Z(x) = c^T x \to \max$$

$$Ax = A_0,$$

$$x \geq 0.$$

Означення 5.1. *Майже допустимим опорним розв‘язком* (*МДОР*) називається такий вектор $x = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)^T$, який задовольняє системі обмежень задачі, не задовольняє умовам невід‘ємності змінних і для якого вектори умов $A_1, \ldots, A_m$, що відповідають відмінним від нуля координатам, лінійно незалежні.

В двоїстому симплекс-методі розглядаються МДОР, при яких оцінки Δ_k розкладів векторів-умов A_k за базисом МДОР відповідають ознаці оптимальності, тобто в задачі на максимум $\Delta_k \geq 0 \; \forall k$, а в задачі на мінімум $\Delta_k \leq 0 \; \forall k$.

Нехай задача лінійного програмування на максимум має початковий МДОР $x^1 = (\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{m0}, 0, \ldots, 0)^T$ з базисом $B_1 = [A_1, \ldots, A_m]$. Будемо вважати, що всі оцінки $\Delta_k \geq 0$.

Якщо хоча б одна координата $\alpha_{l0} < 0$ і серед коефіцієнтів $\alpha_{lj}, \; j = \overline{1, n}$ розкладів векторів-умов за базисом даного розв‘язку $\alpha_{lk} < 0$, то розв‘язок можна покращити, тобто побудувати новий МДОР, для якого значення цільової функції буде менше, якщо з базису вивести вектор A_l і ввести A_k, номер якого знаходиться з умови

$$\gamma_{0l} = \min_j \left\{ \left| \frac{\Delta_j}{\alpha_{lj}} \right| \right\} = \left| \frac{\Delta_k}{\alpha_{lk}} \right|, \alpha_{lj} < 0.$$

Доведемо це.

№ ітерації	B	C_B	A_0	C_1	…	C_l	…	C_m	C_{m+1}	…	C_k	…	C_n
				A_1	…	A_l	…	A_m	A_{m+1}	…	A_k	…	A_n
	A_1	C_1	α_{10}	1	…	0	…	0	α_{1m+1}	…	α_{1k}	…	α_{1n}
	…	…	…	…	…	…	…	…		…	…	…	…
	A_l	C_l	α_{l0}	0	…	1	…	0	α_{lm+1}	…	$\boxed{\alpha_{lk}}$	…	α_{ln}
	…	…	…	…	…	…	…	…		…	…	…	…
	A_m	C_m	α_{m0}	0	…	0	…	1	α_{mm+1}	…	α_{mk}	…	α_{mn}
	Δ_j		$Z(x^1)$	0	…	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_k	…	Δ_n

1. Одержимо умову, що забезпечує невід‘ємність оцінок Δ_k при переході до нового МДОР.

Згідно з методом Жордана-Гауса з розв‘язковим елементом α_{lk}:

$$\alpha'_{lj} = \frac{\alpha_{lj}}{\alpha_{lk}}, \; j = \overline{1,n},$$

$$\alpha'_{ij} = \alpha_{ij} - \frac{\alpha_{lj}}{\alpha_{lk}} \alpha_{ik}, \; i = \overline{1,m}, \; i \neq l, \; j = \overline{1,n}.$$

Симплекс-оцінки Δ_j для першого МДОР знаходять за формулами

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ij} - c_j, \; j = \overline{1,n},$$

а для наступних МДОР після виведення з базису вектора A_l і введення вектора A_k за формулами:

$$\Delta'_j = \sum_{i=1, i \neq l}^{m} c_i \alpha'_{ij} + c_k \alpha'_{lj} - c_j, \; j = \overline{1,n}.$$

Отже,

$$\Delta'_j = \sum_{i=1, i \neq l}^{m} c_i \left(\alpha_{ij} - \frac{\alpha_{lj}}{\alpha_{lk}} \alpha_{ik} \right) + c_k \frac{\alpha_{lj}}{\alpha_{lk}} - c_j = \sum_{i=1, i \neq l}^{m} c_i \alpha_{ij} - \frac{\alpha_{lj}}{\alpha_{lk}} \sum_{i=1, i \neq l}^{m} c_i \alpha_{ik} +$$

$$+ c_k \frac{\alpha_{lj}}{\alpha_{lk}} - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ij} - c_j - \frac{\alpha_{lj}}{\alpha_{lk}} \left(\sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ik} - c_k \right) = \Delta_j - \frac{\alpha_{lj}}{\alpha_{lk}} \Delta_k.$$

$$\Delta'_j = \Delta_j - \frac{\alpha_{lj}}{\alpha_{lk}} \Delta_k, \; j = \overline{1,n}.$$

Нехай $\Delta_j \geq 0, \forall j = \overline{1, n}$. Потрібно забезпечити, щоб $\Delta'_j \geq 0, \forall j$.

$\Delta'_l = \Delta_l - \dfrac{\alpha_{ll}}{\alpha_{lk}} \Delta_k, \Delta_l = 0, \alpha_{ll} = 1, \Delta_k \geq 0,$ тому $\Delta'_l = -\dfrac{\Delta_k}{\alpha_{lk}} \geq 0$, якщо $\alpha_{lk} < 0$.

Таким чином, розв‘язковий елемент $\alpha_{lk} < 0$.

Розглянемо випадки:

а) Якщо $\alpha_{lj} > 0$, то $\Delta'_j = \Delta_j - \dfrac{\alpha_{lj}}{\alpha_{lk}} \Delta_k \geq 0$ без додаткових умов, оскільки $\Delta_j \geq 0, \alpha_{lk} < 0;$

б) Якщо $\alpha_{lj} < 0$, то з умови $\Delta'_j = \Delta_j - \dfrac{\alpha_{lj}}{\alpha_{lk}} \Delta_k \geq 0$ випливає $\Delta_j \geq \dfrac{\alpha_{lj}}{\alpha_{lk}} \Delta_k \Rightarrow \dfrac{\Delta_j}{\alpha_{lj}} \leq \dfrac{\Delta_k}{\alpha_{lk}}, \forall j.$

Оскільки $\dfrac{\Delta_k}{\alpha_{lk}} \leq 0 \left(\Delta_k \geq 0, \alpha_{lk} < 0 \right)$, то одержимо $\left| \dfrac{\Delta_j}{\alpha_{lj}} \right| \geq \left| \dfrac{\Delta_k}{\alpha_{lk}} \right|, j = \overline{1, n}.$

Тому для невід‘ємності оцінок $\Delta'_j, j = \overline{1, n}$ номер k вектора A_k, що вводиться в базис потрібно вибрати з умови

$$\gamma_{0l} = \min_j \left\{ \left| \frac{\Delta_j}{\alpha_{lj}} \right| \right\} = \left| \frac{\Delta_k}{\alpha_{lk}} \right|, \alpha_{lj} < 0.$$

2. Знайдемо умову вибору номеру l вектора A_l, що виводиться з базису.

Згідно з симплекс-методом, приріст цільової функції

$\Delta Z_k = -\theta_{0k} \Delta_k = -\dfrac{\alpha_{l0}}{\alpha_{lk}} \Delta_k = -\alpha_{l0} \dfrac{\Delta_k}{\alpha_{lk}} = \alpha_{l0} \gamma_{0l},$ де $\gamma_{0l} = -\dfrac{\Delta_k}{\alpha_{lk}}$. Щоб в задачі на максимум значення цільової функції спадало, приріст цільової функції має бути від‘ємним: $\Delta Z_k < 0$. Це забезпечується тільки вибором від‘ємної координати α_{l0} МДОР. Для найшвидшого знаходження оптимального розв‘язку l потрібно вибрати з умови:

$$\min_l \left\{ \Delta Z_l \right\} = \min_l \left\{ \alpha_{l0} \gamma_{0l} \right\}, \alpha_{l0} < 0.$$

Теорема 5.2. (*Ознака оптимальності МДОР*).
Майже допустимий опорний розв‘язок є оптимальним, якщо він допустимий.

△ Нехай ЗЛП на максимум має початковий МДОР, при якому оцінки розкладів векторів умов невід‘ємні ($\Delta_k \geq 0, \forall k$). При покращенні МДОР симплекс-оцінки залишаються невід‘ємними. Тому, якщо МДОР стане допустимим, то він буде оптимальним згідно з ознакою оптимальності звичайного симплекс-методу. ▲

Теорема 5.3. (*Ознака відсутності розв‘язку в зв‘язку з несумісністю системи обмежень*). Якщо в МДОР існує хоча б одна $\alpha_{l0} < 0$ і не існує жодного від‘ємного $\alpha_{lj}, j = \overline{1,n}$, то задача не має розв‘язку.

△ Нехай в процесі розв‘язання деяке рівняння має вигляд

$\alpha_{l0} = \alpha_{l1}x_1 + ... + \alpha_{ln}x_n, \alpha_{l0} < 0, \alpha_{lj} \geq 0, \forall j.$

Оскільки оптимальний розв‘язок є допустимим, то його координати невід‘ємні і він не може задовольняти рівнянню, оскільки ліва і права частини цього рівняння різних знаків. ▲

5.5. Алгоритм двоїстого симплекс-методу.

1. Приводимо ЗЛП до канонічного вигляду.
2. Знаходимо МДОР з одиничним базисом, обчислюємо симплекс-оцінки векторів умов за базисом цього розв‘язку, якщо вони узгоджені з ознакою оптимальності ($\Delta_k > 0$ для максимуму, $\Delta_k < 0$ для мінімуму), то задачу можна розв‘язати двоїстим методом.
3. Якщо МДОР не має від‘ємних координат, то він є допустимим і оптимальним. Розв‘язання закінчено.
4. Якщо МДОР має $\alpha_{l0} < 0$ для яких $\alpha_{lj} \geq 0, j = \overline{1,n}$, то задача не має розв‘язку. Розв‘язання закінчено.
5. Якщо хоча б одна координата МДОР від‘ємна, тобто $\alpha_{l0} < 0$ і існує $\alpha_{lj} < 0$, то приходимо до нового розв‘язку, на якому значення цільової функції ближче до оптимального.

Номер k вектора A_k, що вводимо в базис знаходимо з умови

$$\gamma_{0l} = \min_j \left\{ \left| \frac{\Delta_j}{\alpha_{lj}} \right| \right\} = \left| \frac{\Delta_k}{\alpha_{lk}} \right|, \alpha_{lj} < 0.$$

Номер l вектора A_l, що виводиться з базису знаходимо з умов

$\min_l \{\alpha_{l0}\gamma_{0l}\}$ в задачі на максимум

($\max_l \{-\alpha_{l0}\gamma_{0l}\}$ в задачі на мінімум).

Приклад 5.2. Розв‘язати ЗЛП

$$Z(x) = -x_3 - x_4 - 2x_5$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 - x_5 = -2; \\ x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1; \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

№	B	Cb	Cj	0	0	-1	-1	-2
			A0	A1	A2	A3	A4	A5
0	$\leftarrow A1$	0	-2	1	0	$\boxed{-1}$	1	-1
	A2	0	1	0	1	-1	-1	1
Δ_j			0	0	0	1	1	2
γ_{0l}						$1\uparrow$		2
1	A3	-1	2	-1	0	1	-1	1
	A2	0	3	-1	1	0	-2	2
Δ_j			-2	1	0	0	2	1

Оптимальний розв‘язок задачі: $x^* = (0;3;2;0;0)^T$, при цьому $Z(x^*) = -2.$