

## Лекція 4. Метод штучного базису (М-метод).

### 4.1. Поняття про виродженість, монотонність і скінченність симплекс-методу.

ЗЛП будемо називати *невиродженою*, якщо не виродженіми є всі її опорні розв'язки.

Нехай є не вироджена ЗЛП на максимум. Значення цільової функції на двох послідовних ітераціях пов'язані співвідношенням:

$$Z(X^{s+1}) = Z(X^s) - \theta_{0k}^s \Delta_k^s,$$

причому  $\theta_{0k}^s = \frac{\alpha_{i0}^s}{\alpha_{ik}^s} = \min_{i: \alpha_{ik}^s > 0} \frac{\alpha_{i0}^s}{\alpha_{ik}^s} > 0$ ,  $\Delta_k^s < 0$ , то

$$Z(X^{s+1}) > Z(X^s).$$

Отже, послідовність значень цільової функції не виродженої ЗЛП монотонна, а оскільки число опорних планів скінченне (не перебільшує  $C_n^m$ ), то алгоритм методу скінченний.

Якщо ЗЛП вироджена, то одна або декілька базисних змінних опорного розв'язку дорівнюють нулеві, при цьому  $\theta_{0k}^s = 0 \Rightarrow Z(X^{s+1}) = Z(X^s)$ . Це може привести до того, що протягом ряду ітерацій симплекс-методу буде розглядатись одна і та ж вершина, а змінюватимуться лише базисні вектори і можливе повернення до початкового базису. Таке явище називається *зациклюванням*.

Існує неоднозначність при виборі вектора, що підлягає виведенню з базису, або  $\theta_{0k}^s > 0$ , але  $\theta_{0k}^s$  однаковий для двох рядків, тоді наступний розв'язок – вироджений.

Хоча зациклювання в економічних задачах не зустрічається і побудовано лише 5 штучних прикладів, розроблені методи попередження зациклювань.

Тому, якщо мінімум  $\theta_{0k}^s = \min_{i: \alpha_{ik}^s > 0} \frac{\alpha_{i0}^s}{\alpha_{ik}^s}$  досягається для одного індексу  $i = l$ , то  $A_l$  виводиться з базису, якщо для декількох індексів  $i$ ,

то для всіх таких індексів при  $j = 1$  обчислюють і порівнюють  $\frac{\alpha_{ij}^s}{\alpha_{ik}^s}$ . Індекс,

що відповідає найменшому відношенню визначає вектор, що виводиться з базису. Якщо неоднозначність зберігається, то обчислюють для  $j = 2$  тощо. Питання про число ітерацій симплекс-методу досить складне, у середньому  $\approx m$  (число непрямих обмежень).

## 4.2. Постановка задачі

Метод штучного базису (М-метод) застосовується для розв'язання ЗЛП у випадку, коли задача не має початкового опорного розв'язку з базисом з одиничних векторів. Для ЗЛП складається розширена задача (М-задача), яку розв'язують симплексним методом.

Нехай є канонічна ЗЛП:

$$\begin{aligned} Z(x) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max (\min) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i, \quad i = \overline{1, m} \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Вважаємо, що  $b_i \geq 0, \forall i$ .

Для початкової задачі складаємо розширену, використовуючи штучні змінні.

**Штучними змінними** називаються невід'ємні змінні, що входять в обмеження-рівності опорного розв'язку з базисом з одиничних векторів.

Кожну штучну змінну вводимо в ліву частину одного з рівнянь з коефіцієнтом  $+1$  і в цільову функцію задачі на максимум з коефіцієнтом  $-M$  (для задачі на мінімум - з коефіцієнтом  $+M$ ). Число  $M \gg 1$  (для комп'ютерних програм зазвичай вибирають  $M = 10 \max_j |c_j|$ ).

Для задачі на максимум одержимо:

$$\begin{aligned} Z_M(\bar{x}) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j - \sum_{i=1}^m M x_{n+i} \rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} &= b_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad b_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Побудована задача має опорний план  $\bar{x}^1 = (\underbrace{0, \dots, 0}_n, b_1, \dots, b_m)^T$  з базисом  $\bar{B}_1 = (A_{n+1}, \dots, A_{n+m})$ .

## 4.3. Обґрунтування М-методу

### Лема 4.1.

Будь-якому допустимому розв'язку  $x = (k_1, \dots, k_n)^T$  початкової ЗЛП відповідає допустимий розв'язок

$\bar{x} = (k_1, \dots, k_n, 0, \dots, 0)^T$  розширеної задачі і навпаки. При цьому  $Z(x) = Z_M(\bar{x})$ .

△ Нехай  $x = (k_1, \dots, k_n)^T$  - допустимий розв'язок ЗЛП, тоді він задовольняє задачі (4.1):

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} k_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}$$

$$k_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Доповнимо цей розв'язок змінними  $k_{n+1} = \dots = k_{n+m} = 0$ , тоді  $\bar{x} = (k_1, \dots, k_n, 0, \dots, 0)^T$ . Підставимо в розширену задачу (4.2):

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} k_j + 0 = b_i, \quad i = \overline{1, m} \Rightarrow \bar{x} - \text{розв'язок задачі (4.2). Навпаки аналогічно. Перевіримо рівність значень цільових функцій:}$$

$$Z(x) = \sum_{j=1}^n c_j k_j,$$

$$Z_M(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n c_j k_j - \sum_{i=1}^m M \cdot 0 = \sum_{j=1}^n c_j k_j \Rightarrow$$

$$Z(x) = Z_M(\bar{x}). \blacktriangle$$

#### Лема 4.2.

Значення цільової функції М-задачі на максимум (мінімум) на довільному допустимому розв'язку  $\bar{x}_k = (k_1, \dots, k_n, 0, \dots, 0)^T$ , у якого всі штучні змінні нулі більше (менше) значення цільової функції на довільному допустимому розв'язку  $\bar{x}_l = (l_1, \dots, l_{n+m})^T$ , у якого хоча б одна штучна змінна відмінна від нуля.

△ Підставимо розв'язки  $\bar{x}_k = (k_1, \dots, k_n, 0, \dots, 0)^T$  і  $\bar{x}_l = (l_1, \dots, l_{n+m})^T$  в цільову функцію М-задачі:

$$Z_M(\bar{x}_k) = \sum_{j=1}^n c_j k_j,$$

$$Z_M(\bar{x}_l) = \sum_{j=1}^n c_j l_j - \sum_{i=1}^m M \cdot l_{n+i}.$$

Оскільки  $l_{n+i} \geq 0, \forall i$  і хоча б одна з координат  $l_{n+i} > 0$ , то

$$M \sum_{i=1}^m l_{n+i} \gg 1 \Rightarrow Z_M(\bar{X}_l) < Z_M(\bar{X}_k). \blacktriangle$$

**Теорема 4.1.**

1. (Ознака оптимальності розв'язку). Якщо М-задача має оптимальний розв'язок  $\bar{x}^* = (x_1^*, \dots, x_{n'}^*, 0, \dots, 0)^T$ , у якого всі штучні змінні дорівнюють нулеві, то початкова задача має оптимальний розв'язок  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T$ .
2. (Ознака відсутності розв'язку в зв'язку з несумісністю системи обмежень). Якщо М-задача має оптимальний розв'язок, у якого хоча б одна штучна змінна відмінна від нуля, то початкова задача не має розв'язку (несумісна система обмежень).
3. (Ознака відсутності розв'язку у зв'язку з необмеженістю цільової функції). Якщо розширена задача не має розв'язку внаслідок необмеженості цільової функції, то початкова задача не має розв'язку з тієї ж причини.

$\Delta 1$ . Нехай  $\bar{x}^* = (x_1^*, \dots, x_{n'}^*, 0, \dots, 0)^T$  - оптимальний план М-задачі на максимум, тобто

$$Z_M(\bar{x}^*) > Z_M(\bar{x}), \forall \bar{x} \in G_M.$$

За лемою 4.1 вихідна задача має розв'язок  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T$  і  $Z(x^*) = Z_M(\bar{x}^*)$ . Покажемо, що  $x^*$  - оптимальний розв'язок початкової задачі, тобто  $Z(x^*) > Z(x), \forall x \in G$ . Припустимо, що оптимальним є допустимий розв'язок  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ , тобто  $Z(x^0) > Z(x), \forall x \in G$ , а отже,  $Z(x^0) > Z(x^*)$ . За лемою 4.1

$$\exists \bar{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_{n'}^0, 0, \dots, 0)^T : Z(x^0) = Z_M(\bar{x}^0).$$

Тоді  $Z_M(\bar{x}^0) = Z(x^0) > Z(x^*) = Z_M(\bar{x}^*)$ , що суперечить тому, що  $\bar{x}^*$  - оптимальний розв'язок.

2. Нехай  $\bar{x}^* = (x_1^*, \dots, x_{n'}^*, x_{n+1}^*, \dots, x_{n+m}^*)^T$  - оптимальний план М-задачі, тобто  $Z_M(\bar{x}^*) > Z_M(\bar{x}), \forall \bar{x} \in G_M$ , причому  $|x_{n+1}^*| + \dots + |x_{n+m}^*| \neq 0$ .

Припустимо, що початкова задача має деякий допустимий розв'язок  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)^T$ . За лемою 4.1 цьому розв'язку відповідає розв'язок  $\bar{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, 0, \dots, 0)^T$  М-задачі і  $Z_M(\bar{x}^0) > Z_M(\bar{x}^*)$ , що суперечить оптимальності  $\bar{x}^*$ .

3. Нехай М-задача на максимум не має розв'язку внаслідок необмеженості цільової функції, тобто  $Z_M(\bar{x}) \rightarrow +\infty$ . Припустимо, що початкова задача (4.1) має оптимальний план  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T$ . За лемою 4.1 йому відповідає розв'язок  $\bar{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*, 0, \dots, 0)^T$  М-задачі і  $Z_M(\bar{x}^*) = Z(x^*)$ . Оскільки  $Z_M(\bar{x}) \rightarrow +\infty$ , то існує допустимий розв'язок  $\bar{x}_l = (l_1, \dots, l_{n+m})$ , такий що  $Z_M(\bar{x}_l) > Z_M(\bar{x}^*)$ .

Розглянемо 2 випадки:

1)  $l_{n+1} = \dots = l_{n+m} = 0$ ;

2)  $\exists l_{n+i} \neq 0, i = \overline{1, m}$ .

1) Якщо  $l_{n+1} = \dots = l_{n+m} = 0$ , то допустимому розв'язку  $\bar{x}_l = (l_1, \dots, l_n, 0, \dots, 0)^T$  за лемою 4.1 відповідає розв'язок початкової задачі  $x_l = (l_1, \dots, l_n)^T$  і за лемою 4.2  $Z_M(\bar{x}_l) > Z_M(\bar{x}^*)$ , тобто  $Z(x_l) = Z_M(\bar{x}_l) > Z_M(\bar{x}^*) = Z(x^*)$ , що суперечить оптимальності  $x^*$ . 2) Якщо  $\exists l_{n+i} \neq 0$ , тоді за лемою 4.2  $Z_M(\bar{x}_l) < Z_M(\bar{x}^*)$ , що суперечить необмеженості цільової функції  $Z_M(\bar{x})$  М-задачі. Отже, початкова задача також не має розв'язку. ▲

#### 4.4. Особливості алгоритму М-методу

1. Початковий опорний план розширеної М-задачі містить штучні змінні, що входять в цільову функцію з коефіцієнтами  $-M$  (в задачі на максимум) або  $+M$  (в задачі на мінімум), тому оцінки розкладу векторів умов  $\Delta_k = c_B^T x_k - c_k$  складаються з двох доданків  $\Delta'_k$  і  $\Delta''_k(M)$ . Оскільки  $M \gg 1$ , то на першому етапі розрахунків для знаходження векторів, що уводяться до базису використовують тільки оцінки  $\Delta''_k(M)$ .

2. Вектори, що відповідають штучним змінним, які виводяться з базису опорного плану виключаються з розгляду в наступних ітераціях.

3. Після виключення штучних змінних, які виводяться з базису, розв'язання продовжується звичайним симплекс-методом з використанням оцінок  $\Delta'_k$ .

4. Перехід від розв'язання М-задачі (4.2) до розв'язання початкової задачі (4.1) і висновок щодо існування оптимального плану здійснюється згідно теореми 4.1.

**Приклад 4.1.**

Розв'язати ЗЛП М-методом

$$Z(x) = -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3} \end{cases}$$

Розв'яжемо задачу методом штучного базису, оскільки немає початкового опорного плану з одиничним базисом. Додамо в кожне рівняння обмеження штучну змінну, а в цільову функцію додамо ці штучні змінні з коефіцієнтом  $-M$ .

$$Z(x) = -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \max \Rightarrow Z_M(x) = -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - Mx_4 - Mx_5$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1; \end{cases} \begin{matrix} +x_4 \\ +x_5 \end{matrix}$$

Розв'язання запишемо у симплекс-таблицю.

№	B	$C_b$	$C_j$	-2	2	-3	-M	-M	$\theta_i$
			A0	A1	A2	A3	A4	A5	
0	A4	-M	2	-2	1	3	1	0	2/3
	← A5	-M	1	2	3	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4</span>	0	1	1/4
$\Delta_j$			-3M	2	-4M-2	$-7M + 3 \uparrow$	0	0	
1	A4	-M	5/4	-7/2	-5/4	0	1	<del></del>	
	A3	-3	1/4	1/2	3/4	1	0	<del></del>	
$\Delta_j$			-5/4M-3/4	7/2M+1/2	5/4M-1/4	0	0	<del></del>	

$$\frac{7}{2}M > 0, \frac{5}{4}M > 0 \Rightarrow \bar{X}^2 = \left(0; 0; \frac{1}{4}; \frac{5}{4}; 0\right)^T, \bar{B}_2 = [A_4, A_3] - \text{оптимальний розв'язок}$$

М-задачі, але оскільки  $\bar{x}_4^2 = \frac{5}{4} \neq 0$ , то не існує допустимих розв'язків. Система обмежень початкової задачі несумісна.

#### Приклад 4.2.

Розв'язати ЗЛП М-методом

$$z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 8x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 10; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 2; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

Розв'яжемо задачу методом штучного базису, оскільки немає початкового опорного плану з одиничним базисом. Додамо в кожне рівняння обмеження штучну змінну, а в цільову функцію додамо ці штучні змінні з коефіцієнтом  $-M$ .

$$Z(x) = 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 8x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 10; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 2; \end{cases} \begin{matrix} +x_5 \\ +x_6 \end{matrix}$$

$$Z_M(x) = 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 8x_4 - Mx_5 - Mx_6$$

Розв'язання задачі наведемо в табличному вигляді.

№	B	C <sub>b</sub>	C <sub>j</sub>	3	2	1	-8	-M	-M	θ <sub>i</sub>
			A <sub>0</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>	A <sub>6</sub>	
0	A <sub>5</sub>	-M	10	3	3	4	-7	1	0	10/3, 10/3, 5/2
	← A <sub>6</sub>	-M	2	2	1	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span>	-2	0	1	<b>1, 2, 2</b>
Δ <sub>j</sub>			-12M	-5M-3	-4M-2	-1-5M ↑	8	0	0	

Для вибору вектора, що вводиться до базису знаходимо

$$\max \{-1(-5M), -2(-4M), -2(-5M)\} = 10M.$$

Отже, до базису вводиться вектор A<sub>3</sub>, а виводиться вектор A<sub>6</sub>, якому відповідає найменше для обох рядків значення

$$\theta_i = \min \left\{ \frac{5}{2}, 2 \right\} = 2.$$

Продовжуючи розв'язувати задачу симплекс-методом і виводячи штучні змінні з подальшого розгляду, отримаємо оптимальний розв'язок початкової задачі.

№	B	$C_b$	$C_j$	3	2	1	-8	-M	-M	$\theta_i$
			A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6	
1	← A5	-M	2	-5	-1	0	<u>1</u>	1		
	A3	1	2	2	1	1	-2	0		
$\Delta_j$			-2M +2	5M-1	M-1	0	6- -M ↑	0		
2	A4	-8	2	-5	-1	0	1			
	A3	1	6	-8	-1	1	0			
$\Delta_j$			-10	29	5	0	0			

$$x^* = (0; 0; 6; 2)^T, Z(x^*) = -10.$$