# Лекція 3. Симплексний метод розв‘язання ЗЛП.

## 3.1. Поняття симплекс-методу

Симплекс-метод розв‘язання задач лінійного програмування - це метод цілеспрямованого перебору опорних планів ЗЛП, який дозволяє за скінченну кількість кроків або знайти оптимальний план, або встановити його відсутність. Цей метод універсальний, оскільки дозволяє розв‘язати практично будь-яку задачу ЛП в стандартній формі. Симплекс-метод був розроблений і запропонований американським математиком Джорджем Данцігом у 1947 році.

Основний зміст методу полягає в наступному:

1. Вказати спосіб знаходження початкового опорного розв‘язку.
2. Вказати спосіб переходу від одного опорного розв‘язку до іншого, на якому значення цільової функції ближче до оптимального.
3. Задати критерії, що дозволяють своєчасно припинити пошук розв‘язків на оптимальному плані або зробити висновок про відсутність оптимального розв‘язку.

## 3.2. Знаходження початкового опорного плану і перехід до нового опорного плану ЗЛП

Нехай задана задача лінійного програмування в стандартній формі:

$$Z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j A_j = b$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}.$$

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},\ b_i \geq 0, \forall i = \overline{1,m}.$$

Якщо в деякому рівнянні початково $\exists k : b_k < 0,$ то рівняння помножимо на $-1$.

Для знаходження опорного розв‘язку скористаємось тим, що довільний допустимий базисний розв‘язок є опорним. Знайдемо базисний розв‘язок методом виключень Жордана-Гауса.

Усі розв‘язкові (ключові) елементи для усіх перетворень Жордана вибираємо так, щоб праві частини рівнянь системи залишались невід‘ємними. В цьому випадку знайдені базисні розв‘язки будуть допустимими, тобто опорними. Розглянемо правило вибору такого розв‘язкового елементу.

Нехай розв‘язковий елемент – коефіцієнт $a_{lk}$ при невідому $x_k$ в рівнянні з номером $l$.

В результаті перетворень Жордана праві частини рівнянь обчислюються за формулами:

$$b_i' = \begin{cases} \dfrac{b_i}{a_{lk}}, \; i = l, \\ b_i - \dfrac{b_l}{a_{lk}} a_{ik}, \; i = \overline{1,m}, i \neq l. \end{cases}$$

1. Щоб $b_l'$ залишалась невід‘ємною, необхідно:

$$b_l' = \frac{b_l}{a_{lk}} \geq 0.$$

Оскільки $b_l \geq 0 \Rightarrow a_{lk} > 0.$

Тобто, перша умова: розв‘язковий елемент $a_{lk} > 0$.

2. Необхідно, щоб і всі

$$b_i' = b_i - \frac{b_l}{a_{lk}} a_{ik} \geq 0, \; i = \overline{1,m}, i \neq l.$$

Для одержання умов, що накладаються на розв‘язковий елемент розглянемо можливі випадки:

а) якщо $a_{ik} \leq 0,$ то $b_i' \geq 0$ без додаткових умов, оскільки $b_i \geq 0 \; \forall i, \; b_l \geq 0, \; a_{lk} > 0.$

б) якщо $a_{ik} > 0,$ то з нерівності

$$b_i' = b_i - \frac{b_l}{a_{lk}} a_{ik} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{b_i}{a_{ik}} \geq \frac{b_l}{a_{lk}}.$$

Оскільки остання нерівність повинна виконуватись для $\forall i$, для яких $a_{ik} > 0$, то для виведення умов вибору розв‘язкового елементу, введемо допоміжний параметр:

$$\theta_{0k} = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \right\} = \frac{b_l}{a_{lk}}, \text{ при } a_{ik} > 0,$$

де $k$ - номер вектора умов $A_k$, що вводиться до базису, а $l$ - номер вектора умов $A_l$, що виводиться з базису (номер рядка матриці, в якій потрібно вибрати розв‘язковий елемент для перетворень Жордана).

Отже, за цією умовою можна вибрати розв‘язковий елемент в довільному стовпці $k$ матриці системи обмежень, в яких є хоча б один додатний елемент. Таким чином можна знайти початковий опорний план.

Аналогічну умову використовують і при переході від одного опорного плану до іншого.

Нехай система рівнянь обмежень зведена до рівносильної з одиничним базисом $B=\left[A_1',\dots,A_m'\right]$:

$$\begin{cases} x_1+\quad\dots\quad+\alpha_{1m+1}x_{m+1}+\dots+\alpha_{1n}x_n=\alpha_{10};\\ \quad x_2+\ \dots\ +\alpha_{2m+1}x_{m+1}+\dots+\alpha_{2n}x_n=\alpha_{20};\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \qquad x_m+\alpha_{mm+1}x_{m+1}+\dots+\alpha_{mn}x_n=\alpha_{m0}\end{cases}$$

або

$$x_i+\sum_{j=m+1}^{n}\alpha_{ij}x_j=\alpha_{i0},\ i=\overline{1,m},\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,n}.$$

Тоді базисний розв‘язок $x^1=\left(\alpha_{10},\alpha_{20},\dots,\alpha_{m0},0,\dots,0\right)^T$ - опорний план. Для переходу до іншого опорного плану використовуємо співвідношення

$$\theta_{0k}=\min_{i,\alpha_{ik}>0}\left\{\frac{\alpha_{i0}}{\alpha_{ik}}\right\}=\frac{\alpha_{l0}}{\alpha_{lk}},$$

$k$ - номер вектора, що вводиться до базису, $l$ - номер вектора, що виводиться з базису, $\alpha_{i0}$ - координати опорного плану, $\alpha_{ik}$ - коефіцієнти розкладу вектора $A_k$ за базисом опорного розв‘язку.

Але, знаходження оптимального плану шляхом перебору усіх опорних планів має певні труднощі, особливо при відсутності розв‘язків, тому, слід мати алгоритм, що дозволяв би знаходити опорні розв‘язки «не гірше» попередніх.

### 3.3. Перетворення цільової функції при переході від одного опорного плану до іншого

Нехай $x^1=\left(\alpha_{10},\alpha_{20},\dots,\alpha_{m0},0,\dots,0\right)^T$ - опорний план ЗЛП

$$\max\left\{Z\left(x\right)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j,\ \sum_{j=1}^{n}x_jA_j=b,\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,n},\ b_i\ge 0,\ i=\overline{1,m}\right\}$$

з базисом $B_1=\left[A_1,\dots,A_m\right]$.

Значення цільової функції на цьому розв‘язку $Z\left(x^1\right)=\sum_{i=1}^{m}c_i\alpha_{i0}$.

Використовуючи перетворення Жордана з розв‘язковим елементом $a_{lk}$ приходимо до іншого опорного плану

$$X^2=\left(\alpha_{10}',\alpha_{20}',\dots,\alpha'_{(l-1)0},0,\alpha'_{(l+1)0},\dots,\alpha_{m0}',0,\dots,0,\underbrace{\alpha_{l0}'}_{k},0,\dots,0\right)^T$$

с базисом $B_2 = \left(A_1, A_2, \ldots, A_{l-1}, A_{l+1}, \ldots, A_m, A_k\right)$, тобто вводимо в базис вектор $A_k$ і виключаємо вектор $A_l$.

Значення цільової функції на цьому розв'язку $Z\left(x^2\right) = \sum\limits_{i=1, i\neq l}^{m} c_i \alpha'_{i0} + c_k \alpha'_{l0}$.

Праві частини при цьому за методом Жордана-Гауса матимуть вигляд:

$$\alpha'_{l0} = \frac{\alpha_{l0}}{\alpha_{lk}}, \alpha'_{i0} = \alpha_{i0} - \frac{\alpha_{l0}}{\alpha_{lk}} \alpha_{ik}, i = \overline{1, m}, i \neq l.$$

Тоді

$$Z\left(x^2\right) = \sum_{i=1, i\neq l}^{m} c_i \alpha'_{i0} + c_k \alpha'_{l0} = \sum_{i=1, i\neq l}^{m} c_i \left(\alpha_{i0} - \frac{\alpha_{l0}}{\alpha_{lk}} \alpha_{ik}\right) + c_k \frac{\alpha_{l0}}{\alpha_{lk}} =$$

$$= \sum_{i=1, i\neq l}^{m} c_i \alpha_{i0} - \frac{\alpha_{l0}}{\alpha_{lk}} \sum_{i=1, i\neq l}^{m} c_i \alpha_{ik} + c_k \frac{\alpha_{l0}}{\alpha_{lk}} + c_l \alpha_{l0} - c_l \frac{\alpha_{l0}}{\alpha_{lk}} \alpha_{lk} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{i0} - \frac{\alpha_{l0}}{\alpha_{lk}} \sum_{i=1}^{m} \left(c_i \alpha_{ik} - c_k\right) = Z\left(x^1\right) - \theta_{0k} \Delta_k.$$

Тобто

$$Z\left(x^2\right) = Z\left(x^1\right) - \theta_{0k} \Delta_k,$$

де

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ik} - c_k$$

називається *оцінкою розкладу вектору умов $A_k$ за базисом опорного розв'язку* (*симплекс-різницею*).
Або у векторній формі:

$$\Delta_k = c_B^T \boldsymbol{\alpha}_k - c_k,$$

де $c_B = \left(c_1, \ldots, c_m\right)^T$ - вектор коефіцієнтів цільової функції при базисних змінних, $\boldsymbol{\alpha}_k = \left(\alpha_{1k}, \ldots, \alpha_{mk}\right)^T$ - вектор коефіцієнтів розкладу вектора $A_k$ за базисом опорного плану, $c_k$ - коефіцієнт цільової функції при змінній $x_k$.

Тоді приріст функції $Z\left(x\right)$ при переході від одного опорного плану до іншого

$$\Delta Z_k = Z\left(x^2\right) - Z\left(x^1\right) = -\theta_{ok} \Delta_k.$$

Симплекс-оцінки для векторів, що входять в базис завжди дорівнюють нулеві.

### 3.4. Покращення опорного плану

***Лема 3.1.*** Якщо з цільової функції виключити базисні змінні, то коефіцієнтами при небазисних змінних будуть відповідні їм сиплекс-різниці з протилежним знаком і з‘явиться вільний член, що дорівнює значенню цільової функції в базисній точці, що розглядається.

△ Нехай $Z(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j,\quad x_i+\sum_{j=m+1}^{n}\alpha_{ij}x_j=\alpha_{i0},\ i=\overline{1,m}.$

Тоді $x^1=(\alpha_{10},\alpha_{20},\dots,\alpha_{m0},0,\dots,0)^T$ - опорний план і $Z(x^1)=\sum_{i=1}^{m} c_i\alpha_{i0}.$

Виключимо базисні змінні:

$$Z(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j=\sum_{i=1}^{m} c_i x_i+\sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j=\sum_{i=1}^{m} c_i\left(\alpha_{i0}-\sum_{j=m+1}^{n}\alpha_{ij}x_j\right)+$$

$$+\sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j=\sum_{i=1}^{m} c_i\alpha_{i0}-\sum_{j=m+1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} c_i\alpha_{ij}-c_j\right)x_j=Z(x^1)-\sum_{j=m+1}^{n}\Delta_j x_j=$$

$$=\Delta_0-\sum_{j=m+1}^{n}\Delta_j x_j.\ ▲$$

***Теорема 3.1.*** Якщо в ЗЛП на максимум (мінімум) хоча б для одного вектора умов оцінка розкладу за базисом невиродженого опорного плану від‘ємна: $\Delta_k<0$ (додатна: $\Delta_k>0$), то опорний розв‘язок можна покращити, тобто можна знайти новий опорний план, на якому значення цільової функції буде більше (менше).

△ Нехай $Z(x)\to\max$, існує невироджений опорний план $x^1=(\alpha_{10},\alpha_{20},\dots,\alpha_{m0},0,\dots,0)^T$, $\alpha_{i0}>0, i=\overline{1,m}$ і $\Delta_k<0$ для вектора $A_k$. Перейдемо до нового опорного плану $x^2$, для чого введемо у базис вектор $A_k$ і виключимо вектор $A_l$. Тоді

$$\Delta Z_k=Z(x^2)-Z(x^1)=-\theta_{ok}\Delta_k.$$

Розв‘язок $x^1$ - невироджений, тому $\theta_{0k}=\min\limits_{i,\alpha_{ik}>0}\left\{\frac{\alpha_{i0}}{\alpha_{ik}}\right\}=\frac{\alpha_{l0}}{\alpha_{lk}}$. А оскільки $\theta_{0k}>0, \Delta_k<0$, то

$$Z(x^2)-Z(x^1)=-\theta_{ok}\Delta_k>0\Rightarrow Z(x^2)>Z(x^1),$$

тобто розв‘язок можна покращити. ▲

***Наслідок 3.1.*** *(умова найшвидшого знаходження оптимального пла-*

*ну*). Найбільше змінення цільової функції при переході від одного розв‘язку до іншого забезпечує вибір векторів, що вводяться до базису опорного плану і виводяться з нього виходячи з умов:
1) в задачі на максимум:
$$\Delta Z_k = \max_j \left(\Delta Z_j\right) = \max_j \left\{-\theta_{0j}\Delta_j\right\};$$
2) в задачі на мінімум:
$$\Delta Z_k = \min_j \left(\Delta Z_j\right) = \min_j \left\{-\theta_{0j}\Delta_j\right\}.$$

Зауважимо, для спрощення обчислень можна вибирати:
1) в задачі на максимум: $\Delta_k = \min_j \left\{\Delta_j\right\}$;
2) в задачі на мінімум: $\Delta_k = \max_j \left\{\Delta_j\right\}$.

**Наслідок 3.2.** (*ознака оптимальності опорного плану*). Опорний план ЗЛП на максимум (мінімум) є оптимальним, якщо для будь-якого вектора умов $\Delta_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}$ $(\Delta_j \le 0,\ j = \overline{1,n})$.

$\triangle$ Дійсно, якщо $Z(x) \to \max$, $\Delta_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}$, $\theta_{0j} > 0$, то $\Delta Z_j = Z\left(x^2\right) - Z\left(x^1\right) = -\theta_{0j}\Delta_j \le 0 \Rightarrow Z\left(x^2\right) \le Z\left(x^1\right) \Rightarrow$
$x^1 = x^*$ - оптимальний. ▲

**Наслідок 3.3.** (*ознака єдності оптимального плану*). Оптимальний план ЗЛП єдиний, якщо для довільного вектора умов, що не входить в базис симплекс-оцінка відмінна від нуля: $\Delta_j \ne 0,\ j = \overline{m+1,n}.$

**Наслідок 3.4.** (*ознака альтернативного оптимуму*). ЗЛП має нескінченну множину оптимальних планів, якщо оцінка хоча б одного вектора умов, що не є базисним дорівнює нулеві: $\exists k \in \left\{m+1,\dots,n\right\} : \Delta_k = 0.$

**Наслідок 3.5.** (*ознака відсутності оптимального плану внаслідок необмеженості цільової функції*). ЗЛП не має розв‘язку, тобто $\max Z(x) = +\infty \left(\min Z(x) = -\infty\right)$, якщо для деякого з векторів умов $A_k$ з оцінкою $\Delta_k$, що суперечить ознаці оптимальності, серед коефіцієнтів розкладу за базисом опорного розв‘язку немає додатних, тобто:
1) в задачі на максимум:

$\exists k \in \{m+1,...,n\} : \Delta_k < 0, \alpha_{ik} \le 0, i = \overline{1,m}$;

2) в задачі на мінімум:

$\exists k \in \{m+1,...,n\} : \Delta_k > 0, \alpha_{ik} \le 0, i = \overline{1,m}$.

$\triangle$ Нехай $x_i + \sum\limits_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \alpha_{i0}, \alpha_{i0} \ge 0, i = \overline{1,m}$. Спробуємо збільшити цільову функцію за рахунок збільшення змінної $x_k > 0$, не змінюючи нульових значень $x_j, j = \overline{m+1,n}, j \ne k$. Тобто

$$x_{m+1} = ... = x_n = 0, \quad j \ne k, x_k > 0.$$

Тоді

$$x_i + \alpha_{ik} x_k = \alpha_{i0}, i = \overline{1,m} \Rightarrow x_i = \alpha_{i0} - \alpha_{ik} x_k,$$

оскільки $x_i \ge 0$, то $\alpha_{i0} - \alpha_{ik} x_k \ge 0$. Якщо всі $\alpha_{ik} \le 0$, $i = \overline{1,m}$, тоді $\forall x_k \ge 0 \Rightarrow x_i \ge 0$. Отже, розв‘язок залишається опорним, а

$$Z(X) = \Delta_0 - \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j = \Delta_0 - \Delta_k x_k \to \infty, x_k \to \infty. \blacktriangle$$

### 3.5. Алгоритм симплекс-методу.

Для розв‘язання ЗЛП симплексним методом необхідно здійснити наступні кроки:

1. Привести задачу до стандартної ЗЛП.

2. Знайти початковий опорний план з одиничним базисом і коефіцієнти розкладу векторів умов за базисом опорного розв‘язку. (Якщо опорний розв‘язок відсутній, то ЗЛП розв‘язку немає внаслідок несумісності системи обмежень).

3. Нехай розв‘язується задача $Z(x) = c^T x \to \max$ і на $s$-ому кроці опорний розв‘язок $x^s = (\alpha_{10}^s, ..., \alpha_{m0}^s, 0, ..., 0)$. Обчислити симплекс-різниці:

$$\Delta_j^s = \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ij}^s - c_j, \Delta_0^s = Z(x^s) = \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{i0}^s.$$

Якщо $\Delta_j^s \ge 0, j = \overline{m+1,n}$, $(\Delta_i^s = 0, i = \overline{1,m})$, то кінець обчислень, $x^s$ - оптимальний.

4. Якщо $\exists k \in \{m+1,...,n\} : \Delta_k^s < 0, \alpha_{ik}^s \le 0, i = \overline{1,m}$, то кінець обчислень. ЗЛП розв‘язку немає, $Z(x)$ необмежена на ОДР.

5. Якщо $\exists \Delta_j^s < 0, \exists \alpha_{ij}^s > 0$, то $k$ (номер вектора умов, що вводиться до базису) і $l$ (номер вектора умов, що виводиться з базису) знаходимо з умов:

$$\Delta_k^s = \min_{j:\Delta_j^s<0} \Delta_j^s,\ \theta_{0k}^s = \frac{\alpha_{l0}^s}{\alpha_{lk}^s} = \min_{i:\alpha_{ik}^s>0} \frac{\alpha_{i0}^s}{\alpha_{ik}^s}.$$

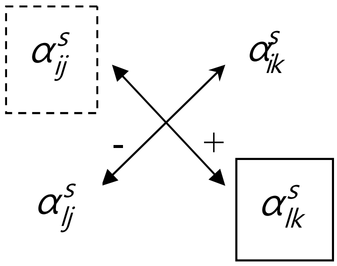
Методом виключень Жордана-Гауса перерахувати матрицю $\left(\alpha_{ij}^s\right)_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ у матрицю $\left(\alpha_{ij}^{s+1}\right)_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ і праві частини $\alpha_{i0}^s,\ i=\overline{1,m}$ у $\alpha_{i0}^{s+1}$ за формулами (правило прямокутника):

$$\alpha_{ij}^{s+1} = \begin{cases} \dfrac{\alpha_{lj}^s}{\alpha_{lk}^s},\ i=l, j\neq k, \\ \alpha_{ij}^s - \dfrac{\alpha_{lj}^s \alpha_{ik}^s}{\alpha_{lk}^s},\ i\neq l; \end{cases} \qquad \alpha_{i0}^{s+1} = \begin{cases} \dfrac{\alpha_{l0}^s}{\alpha_{lk}^s},\ i=l, \\ \alpha_{i0}^s - \dfrac{\alpha_{l0}^s \alpha_{ik}^s}{\alpha_{lk}^s},\ i\neq l; \end{cases}$$

$$\alpha_{lk}^{s+1} = 1,\ \alpha_{ik}^{s+1} = 0, i\neq l.$$

Перейти до пункту 3.

***Зауваження 3.1.*** (*Правило прямокутника*). Щоб одержати елемент $\alpha_{ij}^{s+1}$ нової симплекс-таблиці потрібно із добутку кутових елементів діагоналі, що містить розв‘язковий елемент $\alpha_{lk}^s$ відняти добуток кутових елементів іншої діагоналі і одержане число розділити на розв‘язковий елемент.




Розв‘язуючи задачу симплекс-методом зручно всі обчислення заносити до симплекс-таблиці.

| № ітерації | $B$ | $C_B$ | $b$ | $c_1$ | … | $c_l$ | … | $c_m$ | $c_{m+1}$ | … | $c_k$ | … | $c_n$ | $\theta_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $A_1$ | … | $A_l$ | … | $A_m$ | $A_{m+1}$ | … | $A_k$ | … | $A_n$ | |
| | $A_1$ | $c_1$ | $\alpha_{10}$ | 1 | … | 0 | … | 0 | $\alpha_{1m+1}$ | … | $\alpha_{1k}$ | … | $\alpha_{1n}$ | |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | … | ⋮ | … | ⋮ | ⋮ | … | ⋮ | … | ⋮ | |
| | $\leftarrow A_l$ | $c_l$ | $\alpha_{l0}$ | 0 | … | 1 | … | 0 | $\alpha_{lm+1}$ | … | $\boxed{\alpha_{lk}}$ | … | $\alpha_{ln}$ | |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | … | ⋮ | … | ⋮ | ⋮ | … | ⋮ | … | ⋮ | |
| | $A_m$ | $c_m$ | $\alpha_{m0}$ | 0 | … | 0 | … | 1 | $\alpha_{mm+1}$ | … | $\alpha_{mk}$ | … | $\alpha_{mn}$ | |
| | $\Delta_j$ | | $\Delta_0$ | 0 | … | 0 | … | 0 | $\Delta_{m+1}$ | … | $\uparrow \Delta_k$ | … | $\Delta_n$ | |

***Приклад 3.1.*** Розв‘язати ЗЛП симплексним методом

$$Z(x) = 9x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 \le 6; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 24; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_5 = 30; \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Запишемо задачу у стандартній формі:

$$Z(x) = 9x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 0 \cdot x_6 + 4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_6 = 6; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 24; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_5 = 30; \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,6} \end{cases}$$

Розв‘яжемо використовуючи табличний запис симплексного методу.

| № | $B$ | $C_b$ | $C_j$ | 9 | 5 | 4 | 3 | 2 | 0 | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $A0$ | $A1$ | $A2$ | $A3$ | $A4$ | $A5$ | $A6$ | |
| 0 | $\leftarrow A6$ | 0 | 6 | 1 | -2 | $\boxed{2}$ | 0 | 0 | 1 | **3** |
| | $A4$ | 3 | 24 | 1 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 24 |
| | $A5$ | 2 | 30 | 2 | 1 | -4 | 0 | 1 | 0 | - |
| $\Delta_j$ | | | 132+4= =136 | -2 | 3 | $-9 \uparrow$ | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | $A3$ | 4 | 3 | 1/2 | -1 | 1 | 0 | 0 | 1/2 | |
| | $\leftarrow A4$ | 3 | 21 | 1/2 | $\boxed{3}$ | 0 | 1 | 0 | -1/2 | |
| | $A5$ | 2 | 42 | 4 | -3 | 0 | 0 | 1 | 2 | |
| $\Delta_j$ | | | 159+4= =163 | 5/2 | $-6 \uparrow$ | 0 | 0 | 0 | 9/2 | |
| 2 | $A3$ | 4 | 10 | 2/3 | 0 | 1 | 1/3 | 0 | 1/3 | |
| | $A2$ | 5 | 7 | 1/6 | 1 | 0 | 1/3 | 0 | -1/6 | |
| | $A5$ | 2 | 63 | 9/2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 3/2 | |
| $\Delta_j$ | | | 201+4= =205 | 7/2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 7/2 | |

Обчислення.

*1 ітерація.*

$$\Delta_1 = C_b A_1 - c_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 9 = 7 - 9 = -2; \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 5 = 3;$$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - 4 = -9; \quad \Delta_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 = 0; \quad \Delta_5 = \Delta_6 = 0;$$

$\theta_1 = 6/2 = 3; \quad \theta_2 = 24/1 = 24$.

Оскільки $\Delta_3 = -9 < 0$, то розв‘язок не є оптимальним. Його можна покращити, увівши до базису вектор $A_3$.

$\min\{\theta_1, \theta_2\} = \min\{3, 24\} = 3,$ тому виведемо з базису вектор $A_6$. Перерахуємо таблицю, використовуючи метод виключень Жордана-Гауса.

*2 ітерація.*

$$\Delta_1^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 4 \end{pmatrix} - 9 = 10 + 3/2 - 9 = \frac{5}{2}.$$

Виконаємо контроль обчислень.

$$\Delta_1^2 = \frac{\Delta_1^1 \alpha_{13} - \alpha_{11} \Delta_3^1}{\alpha_{13}} = \frac{2 \cdot (-2) - 1 \cdot (-9)}{2} = \frac{5}{2}.$$

Аналогічно знаходимо інші симплекс різниці і виконаємо ще одну ітерацію, оскільки $\Delta_3^2 = -6 < 0.$

В останній таблиці усі симплекс різниці невід‘ємні, тому одержаний розв‘язок оптимальний.

Задача має єдиний розв‘язок:

$Z_{\max} = Z(x^*) = 205,\ \tilde{x}^* = (0; 7; 10; 0; 63; 0),\ x^* = (0; 7; 10; 0; 63).$