Лекція 2. Геометрична інтерпретація ЗЛП. Властивості допустимої області ЗЛП.

2.1. Графічний спосіб розв‘язання ЗЛП.

Розглянемо ЗЛП в $\mathbb{R}^2$.

$$Z(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max \tag{2.1}$$

при обмеженнях

$$\begin{aligned} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i,\ i = \overline{1,m}, \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Нехай система (2.2) сумісна, а ОДР обмежена. Кожна з нерівностей визначає півплощину з межею $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i,\ i = \overline{1,m}$ або $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Лінійна функція (2.1) при фіксованих значеннях $Z(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 = const$ є рівнянням прямої. Така пряма є лінією рівня цільової функції $Z(x)$:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = h = const,\ h \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Лінія рівня, що має з ОДР G принаймні одну спільну точку і розміщена так, що ОДР лежить по один бік від неї називається *опорною прямою*.

Потрібно знайти положення опорної прямої при якому $Z(x)$ максимальна.

Розглянемо вектор $\overline{N} = (c_1; c_2)$. Геометричний зміст цього вектора – нормаль до прямої (2.3), а фізичний зміст – градієнт функції $Z(x)$: $\nabla Z(x) = \left(\frac{\partial Z}{\partial x_1}; \frac{\partial Z}{\partial x_2}\right)$, який, як відомо, напрямлений в бік найшвидшого зростання функції.

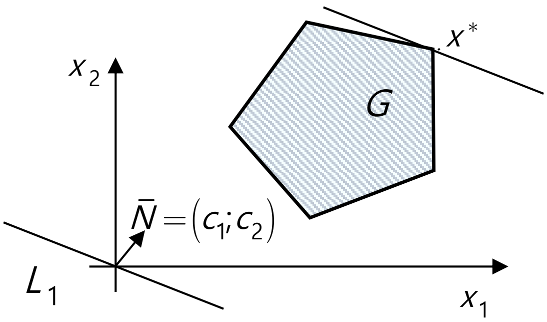

Рис. 2.1

Отже, будуємо пряму перпендикулярно до вектора $\overline{N}$ і паралельно переміщуємо її в бік $\overline{N}$ до положення опорної прямої (рис. 2.1).

Алгоритм розв‘язку ЗЛП з двома змінними графічним методом.

1. Будують ОДР ($G = \varnothing \Rightarrow$ розв‘язку немає)

2. Будують вектор нормалі $\overline{N} = \left(c_1; c_2\right)$.

3. Проводять пряму L_1: $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0 \quad \left(L_1 \perp \overline{N}\right)$.

4. Переміщують L_1 до положення опорної прямої (в бік $\overline{N} \to \max$, в бік $-\overline{N} \to \min$).

5. Точка, що лежить на перетині опорної прямої і ОДР є оптимальним розв‘язком ЗЛП.

6. Координати оптимальної точки знаходять з системи рівнянь-обмежень, що відповідають прямим, що проходять через цю точку. Обчислюють значення цільової функції в оптимальній точці.

В залежності від вигляду ОДР і цільової функції $Z\left(x\right)$ можливі наступні випадки:

I. Задача лінійного програмування має один розв‘язок (див. рис. 2.1).

II. Альтернативний оптимум. Максимум досягається на відрізку, тобто ЗЛП має безліч розв‘язків (рис. 2.2).

III. ЗЛП на має жодного розв‘язку внаслідок необмеженості на ОДР цільової функції (рис. 2.3).

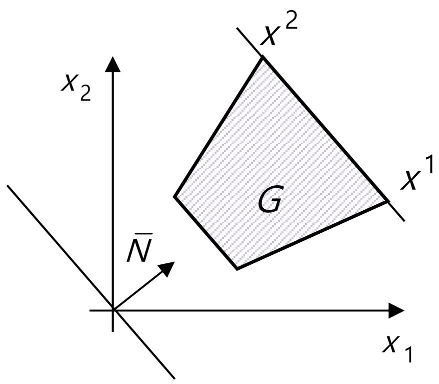

Рис. 2.2

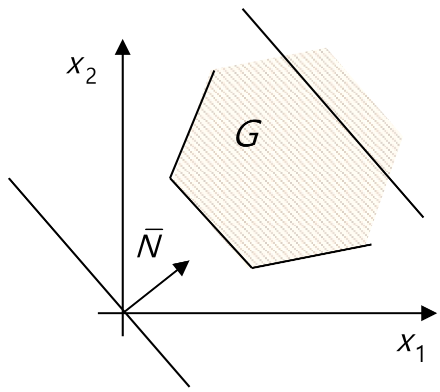

Рис. 2.3.

Приклад 2.1.

Оптимальний план виробництва. Кондитерська фабрика виробляє продукт двох видів: цукерки і шоколад. Для виробництва продукції кожного виду потрібні ресурси двох типів: цукор і какао-боби. Для виробництва 1т продукції кожного виду потрібно по 1т цукру. Для 1т шоколаду потрібно 5т какао, для 1т цукерок – 2т какао. Добові запаси ресурсів відповідно 4 і 10 т. прибуток від реалізації 1т шоколаду і цукерок – 5 і 3 тис. грн.. відповідно. Скласти математичну модель для знаходження оптимального (що максимізує прибуток) добового плану виробництва. Розв‘язати задачу графічним способом.

Нехай x_1 - добовий обсяг виробництва шоколаду (т), x_2 - добовий обсяг виробництва цукерок (т).

Цільова функція (критерій оптимальності) – загальний прибуток від реалізації добового плану $x = \left(x_1; x_2\right)^T$ визначається функцією

$$Z = 5x_1 + 3x_2 .$$

Обмеження $\begin{pmatrix}\text{витрата}\\ \text{ресурсу}\end{pmatrix} \le \begin{pmatrix}\text{запас}\\ \text{ресурсу}\end{pmatrix}$:

на витрату цукру

$$x_1 + x_2 \le 4,$$

на витрату какао-бобів

$$5x_1 + 2x_2 \le 10,$$

на знак змінних

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Отже,

$$Z = 5x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Побудуємо область допустимих розв‘язків (рис. 2.4).

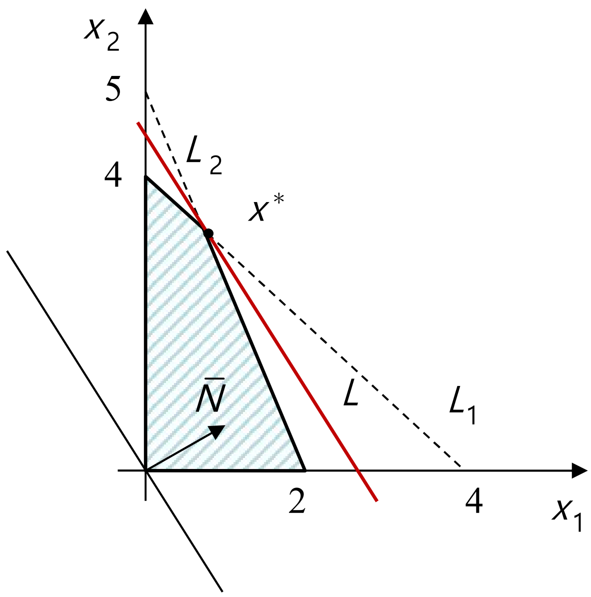

Рис. 2.4.

Вектор нормалі $\bar{N} = \left(5; 3\right)$, оптимальний розв‘язок знаходимо з системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ 5x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* = 2/3, \\ x_2^* = 10/3 \end{cases} \Rightarrow x^* = \left(\frac{2}{3}; \frac{10}{3}\right)^T, \ Z_{\max} = Z\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right) = \frac{40}{3}.$$

2.2. Аналіз оптимального розв‘язку на чутливість.

Модель лінійного програмування є «моментальним знімком» реальної ситуації, коли параметри модель вважають незмінними. Вивчимо вплив змінення параметрів моделі на одержаний оптимальний розв‘язок ЗЛП. Таке дослідження називається *аналізом моделі на чутливість*.

1. Перша задача на чутливість – чутливість до правих частин обмежень. Для цієї задачі обмеження кваліфікують як:

1) активні (зв‘язані), якщо відповідні їм прямі проходять через оптимальну точку;

2) пасивні (незв‘язані), якщо відповідні їм прямі не проходять через оптимальну точку.

Активним обмеженням відповідають дефіцитні ресурси, тобто ті, що використовуються повністю, пасивним відповідають недефіцитні ресурси.

Цілі першої задачі на чутливість:

а) визначити гранично допустиме збільшення запасу дефіцитного ресурсу, що дозволяє покращити значення цільової функції;

б) визначити гранично допустиме зниження недефіцитного ресурсу, що не змінює знайдений оптимальний розв‘язок.

Ресурс 1 – дефіцитний, L_1 – активне обмеження, ресурс 2 – дефіцитний, L_2 – активне обмеження.

Для ресурсу 1 гранично допустиме збільшення запасу складає 1т (з 4 до 5т), оскільки пряму L_1 є сенс рухати паралельно собі до точки $(0;5)$ (рис. 2.5), тобто L_1': $x_1 + x_2 = 5$.

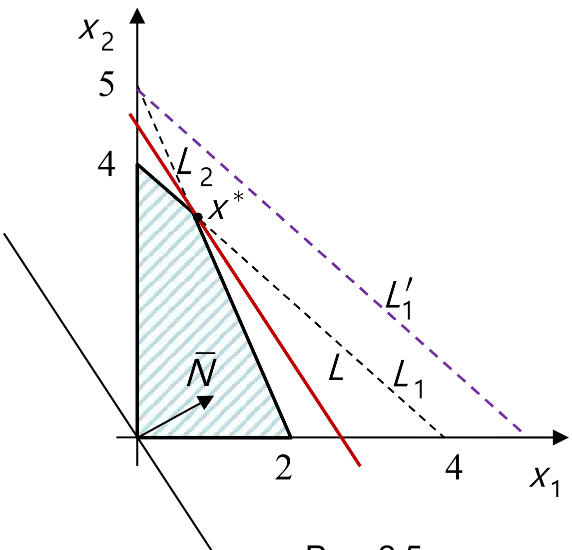

Рис. 2.5.

Максимальний прибуток буде в точці $(0;5)$: $Z(0,5)=15 \Rightarrow \Delta Z=15-\frac{40}{3}=\frac{5}{3}$, тобто збільшиться на $\frac{5}{3}$.

При збільшенні запасу ресурсу 2 пряму L_2 (рис. 2.6) слід рухати до точки $(4;0) \Rightarrow L_2': 5x_1+2x_2=20$ і змінення ресурсу 2 складає 10 (з 10 до 20).

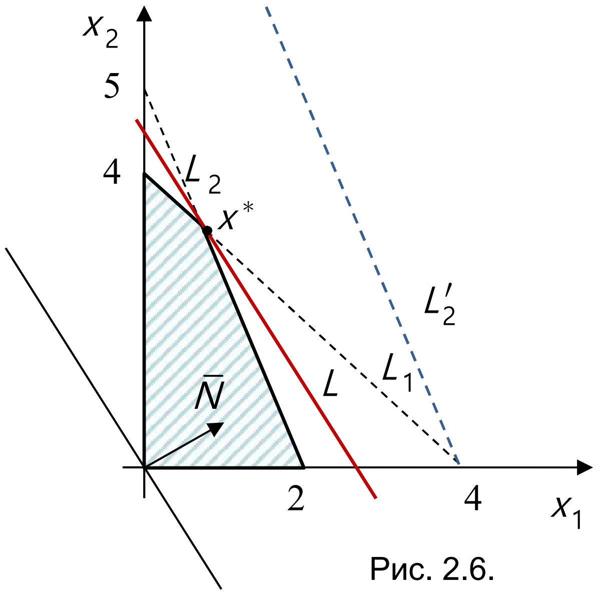

Рис. 2.6.

Максимальний прибуток $Z(4,0)=20 \Rightarrow \Delta Z=20-\frac{40}{3}=\frac{20}{3}$.

Ресурс	Тип (статус) ресурсу	Максимальне змінення запасу	Максимальне змінення прибутку
Ресурс 1	дефіцитний	$5-4=1$	$15-40/3=5/3$
Ресурс 2	дефіцитний	$20-10=10$	$20-40/3=20/3$

2. Друга задача на чутливість дозволяє визначити міру залежності оптимального розв‘язку від змінення обмежень на ресурси.

Ця міра називається *тіньовою (двоїстою) ціною* ресурсу і вказує, на скільки зміниться оптимальне значення цільової функції при змінені кількості ресурсу на одиницю.

Тіньова ціна ресурсу позначається y_i і обчислюється за формулою

$$y_i=\frac{\textit{максимальне збільшення прибутку}}{\textit{максимальне збільшення запасу } i-\textit{го ресурсу}}$$

$$\Rightarrow y_1=\frac{15-40/3}{1}=\frac{5}{3}, \quad y_2=\frac{20-40/3}{10}=\frac{2}{3}.$$

Зауважимо, що для недефіцитних ресурсів тіньова ціна завжди дорівнює нулю.

Висновок: найбільший зиск отримаємо від збільшення ресурсу 1, оскільки прибуток на одиницю цього ресурсу більше.

3. Третя задача на чутливість полягає у визначенні границь змінення коефіцієнтів цільової функції, що дозволяють зберегти оптимальний розв‘язок задачі.

Нехай $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ - цільова функція.

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$, $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$ - два активних обмеження в оптимальній точці X^*.

При зміненні коефіцієнтів цільової функції розв‘язок залишається оптимальним, якщо:

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} \le \frac{c_1}{c_2} \le \frac{a_{21}}{a_{22}} \text{ (діапазон оптимальності).}$$

В наведеному прикладі $x^* = \left(\frac{2}{3}; \frac{10}{3}\right)^T$ залишається оптимальним, якщо $\frac{1}{1} \le \frac{c_1}{c_2} \le \frac{5}{2}$.

Якщо $c_1 = const = 5$, то

$$\frac{1}{1} \le \frac{5}{c_2} \le \frac{5}{2} \Rightarrow 2 \le c_2 \le 5,$$

якщо $c_2 = const = 3$, то

$$\frac{1}{1} \le \frac{c_1}{3} \le \frac{5}{2} \Rightarrow 3 \le c_1 \le \frac{15}{2}.$$

2.3. Графічний метод розв‘язання ЗЛП з n змінними.

Графічним методом можна розв‘язати ЗЛП, що мають стандартну форму і задовольняють умовам $n - r \le 2$, де n - кількість невідомих, r - ранг системи векторів-умов (кількість рівнянь системи).

Якщо рівняння системи лінійно-незалежні, то $r = m$, де m - число рівнянь.

2.4. Опуклі множини.

Нехай $\left\{x^1, \ldots, x^r\right\} \subset \mathbb{R}^n$, $x^i = \left(x_1^i, \ldots, x_n^i\right)^T$.

Означення 2.1. *Опуклою лінійною комбінацією* точок $x^1, \ldots, x^r$ називається

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x^i,\ \lambda_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1.$$

Множина усіх лінійних комбінацій точок $x^1,\dots,x^r$ називається *опуклою лінійною оболонкою* і позначається $conv\left(x^1,\dots,x^r\right)$.

Якщо $r=2$, то лінійна оболонка називається *відрізком*, що з‘єднує точки x^1,x^2 і позначається:

$$\left[x^1,x^2\right]=\left\{x \mid x=\lambda x^1+\left(1-\lambda\right)x^2, 0\le\lambda\le 1\right\}.$$

Означення 2.2. Множина $D\subset\mathbb{R}^n$ називається *опуклою*, якщо

$$\forall\left\{x^1,x^2\right\}\subset D\Rightarrow\left[x^1,x^2\right]\subset D.$$

Гіперплощиною називається множина точок $x\in\mathbb{R}^n$, що задовольняють рівнянню

$$\left\langle a,x\right\rangle=\sum_{j=1}^{n}a_jx_j=b.$$

Півпростором в $\mathbb{R}^n$ називається множина точок $x\in\mathbb{R}^n$, координати яких задовольняють нерівностям

$$\left\langle a,x\right\rangle=\sum_{j=1}^{n}a_jx_j\le\left(\ge\right)b,$$

Означення 2.3. *Поліедральною* (*многогранною*) множиною називається перетин скінченного числа півпросторів. Обмежена многогранна множина називається *політопом* (*многогранником*).

Лема 2.1. Півпростір є опуклою множиною.

$\triangle$ Нехай півпростір задано нерівностями

$$\sum_{j=1}^{n}a_jx_j\le b,$$

x^1,x^2 – точки півпростору, отже

$$\sum_{j=1}^{n}a_jx_j^k\le b,\ k=1,2,\ \ x^k=\left(x_1^k,\dots,x_n^k\right).$$

Нехай

$$\forall x\in\left[x^1,x^2\right]\Rightarrow x=\lambda x^1+\left(1-\lambda\right)x^2, 0\le\lambda\le 1.$$

Тоді

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\lambda x_j^1 + (1-\lambda) x_j^2\right) = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_j x_j^1 + (1-\lambda) \sum_{j=1}^{n} a_j x_j^2 \le$$
$$\le \lambda b + (1-\lambda) b = b.$$

Отже, $\forall x \in \left[x^1, x^2\right]$ належить півпростору, тобто півпростір – опукла множина. ▲

Лема 2.2. Перетин опуклих множин є опуклою множиною.

△Нехай A і B – опуклі множини, $A \cap B \ne \varnothing$.

Розглянемо $\left\{x^1, x^2\right\} \subset A \cap B$, тоді $\left\{x^1, x^2\right\} \subset A \wedge \left\{x^1, x^2\right\} \subset B$.

A і B – опуклі $\Rightarrow \left[x^1, x^2\right] \subset A, \left[x^1, x^2\right] \subset B$.

Отже, за означенням перетину множин $\left[x^1, x^2\right] \subset A \cap B$. ▲

Наслідок Гіперплощина є опуклою множиною.

Виходячи з постановки ЗЛП зрозуміло, що допустима область G є многогранною множиною (якщо вона не порожня).

Таким чином, справедлива

Теорема 2.1. Допустима множина G ЗЛП є опуклою многогранною множиною.

Отже, ЗЛП у $\mathbb{R}^n$ полягає у знаходженні мінімуму (максимуму) лінійної функції $Z(x)$ на опуклій многогранній множині.

Важливою властивістю, що характеризує опуклі множини, є властивість віддільності.

Теорема 2.2. (Про віддільну площину) Нехай A та B два опуклих компакта в $\mathbb{R}^n$, $A \cap B = \varnothing$. Тоді існує гіперплощина $\langle p, u \rangle = c$, яка строго відділяє множини A та B, тобто

$$\langle p, x \rangle < c < \langle p, y \rangle \ \forall x \in A, \forall y \in B.$$

△ Розглянемо на $A \times B$ функцію $|x-y|^2$, де $x \in A, y \in B$, і нехай $\left(x^0, y^0\right)$ - точка її мінімуму. Тоді $\left|x^0 - y^0\right| > 0$. Покажемо, що гіперплощина $\langle p, u \rangle = c$, де $p = y^0 - x^0, c = \frac{1}{2}\left(\left|y^0\right|^2 - \left|x^0\right|^2\right)$ є шуканою. Доведемо, що $\langle p, x \rangle < c \ \ \forall x \in A$. Доведення побудуємо методом від супротивного. Припустимо, що $\exists \tilde{x} \in A : \langle p, \tilde{x} \rangle \ge c$.

Розглянемо функцію

$$g(t) = \left|y^0 - (1-t)x^0 - t\tilde{x}\right|^2, t \in [0,1].$$

$$g'(t)=2\left\langle y^0-(1-t)x^0-t\tilde{x},x^0-\tilde{x}\right\rangle$$

$$g'(0)=2\left\langle y^0-x^0,x^0-\tilde{x}\right\rangle=2\left\langle y^0-x^0,x^0\right\rangle-2\left\langle p,\tilde{x}\right\rangle\le$$

$$\le 2\left\langle y^0,x^0\right\rangle-2\left|x^0\right|^2-2c=2\left\langle y^0,x^0\right\rangle-\left|x^0\right|^2-\left|y^0\right|^2=-\left|y^0-x^0\right|^2<0.$$

Тобто для додатних, близьких до 0 значень t: $g(t)<g(0)$, що суперечить означенню пари $\left(x^0,y^0\right)$. Друга нерівність $\left\langle p,y\right\rangle>c\ \ \forall y\in B$ доводиться аналогічно.▲

Означення 2.4. Нехай x^* - межова точка опуклої замкненої множини D, гіперплощина $\left\langle p,u\right\rangle=c$ називається *опорною* в точці x^*, якщо $\left\langle p,x^*\right\rangle=c$, а множина D лежить в одному з півпросторів, утворених цією гіперплощиною: $\left\langle p,x\right\rangle\ge c,\forall x\in D$ або $\left\langle p,x\right\rangle\le c,\forall x\in D$.

Означення 2.5. Точка x опуклої множини $D\subset\mathbb{R}^n$ називається *кутовою* (*крайньою*), якщо її не можна представити у вигляді $x=\lambda x^1+(1-\lambda)x^2,\quad$ де $x^1,x^2\in D,\ x^1\ne x^2,\ 0<\lambda<1.$

Геометрично це означає, що x – крайня, якщо її не можна розмістити усередині відрізка, кінці якого належать D

Кутові точки опуклої многогранної множини є її вершинами.

Зауважимо, що якщо множина не опукла, то це не так. Приміром, точка M – вершина, але не крайня.

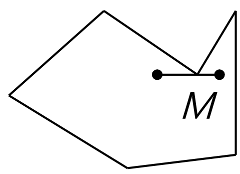

Рис. 2.7. Не опукла множина

Лема 2.3. (*Про подання точки опуклої множини*). Будь-яка точка опуклої, замкненої і обмеженої множини може бути подана у вигляді опуклої лінійної комбінації деякого числа її кутових точок.

△Доведемо для $n=2$ і трикутника x^1,x^2,x^3.

Через довільну точку x трикутника проведемо відрізок x^1x^4 (рис.2.8). Тоді

$$x=\lambda_1x^1+\lambda_4x^4,\ \lambda_1\ge 0,\lambda_4\ge 0,\ \lambda_1+\lambda_4=1.$$

$$x^4\in\left[x^2,x^3\right]\Rightarrow x^4=\lambda_2x^2+\lambda_3x^3,$$

$$\lambda_2\ge 0,\lambda_3\ge 0,\ \lambda_2+\lambda_3=1.$$

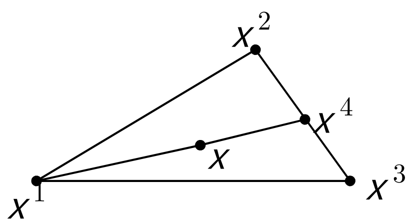

Рис. 2.8.

Тоді

$x = \lambda_1 x^1 + \lambda_4\left(\lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3\right) = \lambda_1 x^1 + \lambda_2\lambda_4 x^2 + \lambda_3\lambda_4 x^3.$

Покладемо $t_1 = \lambda_1, t_2 = \lambda_2\lambda_4, t_3 = \lambda_3\lambda_4$:

$x = t_1 x^1 + t_2 x^2 + t_3 x^3, t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_3 \geq 0, t_1 + t_2 + t_3 = 1.$

Тобто x - опукла лінійна комбінація кутових точок трикутника $x^1x^2x^3$.▲

2.5. Властивості розв‘язків ЗЛП.

Теорема 2.3. (*про оптимальні розв‘язки ЗЛП*).
1. Цільова функція ЗЛП досягає екстремуму в кутовій точці ОДР.
2. Якщо цільова функція досягає екстремуму в декількох кутових точках ОДР, то вона досягає екстремуму і в довільній лінійній комбінації цих точок.

△ 1. Для визначеності вважаємо, що

$$Z(x) = c^T x \to \max$$
$$Ax = b, \ x \geq 0.$$

Нехай $x^* = \underset{x \in G}{\arg\max}\, Z(x)$, G – ОДР.

Тоді $Z(x^*) \geq Z(x) \quad \forall x \in G$.

Якщо x^*– вершина G, то теорему доведено. Якщо x^* не кутова, то за лемою 2.3

$$x^* = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j x^j,\ x^j \geq 0,\ \sum_{j=1}^{s} \lambda_j = 1,$$

де $x^j \left(j = \overline{1,m}\right)$ кутові точки області G. Знайдемо

$$Z(x^*) = c^T x^* = c^T \sum_{j=1}^{s} \lambda_j x^j = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j c^T x^j = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j Z(x^j).$$

Серед значень $Z(x^j)$ вибираємо максимальне. Нехай це $Z(x^k)$, тобто $\max\limits_{j} Z(x^j) = Z(x^k)$. Тоді

$$Z(x^*) \leq \sum_{j=1}^{s} \lambda_j Z(x^k) = Z(x^k) \sum_{j=1}^{s} \lambda_j = Z(x^k).$$

Маємо

$$\begin{cases} Z(x^*) \geq Z(x)\ \forall x \in G, \\ Z(x^*) \leq Z(x^k) \end{cases} \Rightarrow Z(x^*) = Z(x^k) \Rightarrow x^* \text{– кутова точка } G.$$

2. Нехай $x^1,\ldots,x^s$ – кутові точки області, які є оптимальними розв‘язками, тобто

$Z\left(x^1\right)=\ldots=Z\left(x^s\right)$ і $Z\left(x^1\right)\geq Z\left(x\right)\ \forall x\in G$.

Знайдемо значення $Z\left(x\right)$ в деякій опуклій лінійній комбінації цих кутових точок:

$$x^*=\sum_{j=1}^{s}\lambda_j x^j,\ \lambda_j\geq 0,\ j=\overline{1,s},\ \sum_{j=1}^{s}\lambda_j=1.$$

$$Z\left(x^*\right)=c^T x^*=c^T\sum_{j=1}^{s}\lambda_j x^j=\sum_{j=1}^{s}\lambda_j c^T x^j=$$

$$=\sum_{j=1}^{s}\lambda_j Z\left(x^j\right)=Z\left(x^1\right)\sum_{j=1}^{s}\lambda_j=Z\left(x^1\right).$$

Отже, $Z\left(x^*\right)$ – також оптимальний розв‘язок. ▲

Висновок. Розв‘язки ЗЛП слід шукати серед вершин її допустимої множини G .

Однак, пряма реалізація цієї ідеї практично неможлива через велику кількість вершин у загальному випадку та складність їх знаходження.

2.6. Опорний розв‘язок ЗЛП.

Нехай задана ЗЛП

$$\max\left\{Z\left(x\right)=c^T x : Ax=b, x\geq 0\right\},$$

$A_{m\times n}$ – матриця коефіцієнтів, $r\left(A\right)=m<n,\quad A=\left[A_1,A_2,\ldots,A_n\right]$, де $A_j=\left(a_{1j},a_{2j},\ldots,a_{mj}\right)^T,\ j=\overline{1,n}.$

Вектори $A_1,A_2,\ldots,A_n$ називаються *векторами умов*. Оскільки $r\left(A\right)=m<n,$ то довільний базис системи векторів $A_1,\ldots,A_n$ містить m векторів. Виберемо один з таких базисів, нехай це перші m:

$B=\left[A_1,\ldots,A_m\right],$

B – базисна матриця, отже вона не вироджена, тобто $\exists B^{-1}$.

$$Ax=b\Leftrightarrow\sum_{j=1}^{n}x_j A_j=b.$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_i A_i+\sum_{j=m+1}^{n}x_j A_j=b.$$

Помножимо останню рівність на B^{-1} зліва.

$$\sum_{i=1}^{m} x_i B^{-1} A_i + \sum_{j=m+1}^{n} x_j B^{-1} A_j = B^{-1} b.$$

$$B^{-1} A_i = \mathbf{e}_i = (0,\dots,0,\underset{i}{1},0,\dots,0)^T,\ i = \overline{1,m},$$

$$B^{-1} A_j = \boldsymbol{\alpha}_j = (\alpha_{1j},\dots,\alpha_{mj})^T,\ j = \overline{m+1,n},\ \ B^{-1} b = \boldsymbol{\alpha}_0 = (\alpha_{10},\dots,\alpha_{m0})^T.$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \mathbf{e}_i + \sum_{j=m+1}^{n} x_j \boldsymbol{\alpha}_j = \boldsymbol{\alpha}_0 \Leftrightarrow x_i + \sum_{j=m+1}^{n} x_j \alpha_{ij} = \alpha_{i0},\ i = \overline{1,m}.$$

Покладемо $x_j = 0, \left(j = \overline{m+1,n}\right) \Rightarrow x_i = \alpha_{i0}$.

Тоді $x = \left(\alpha_{10},\dots,\alpha_{m0},0,\dots,0\right)^T$ – базисний розв‘язок.

Розв‘язок $x = \left(x_1,\dots,x_n\right)^T$ системи $Ax = b$ називається *базисним*, якщо його ненульові координати відповідають лінійно незалежній системі векторів.

Базисний розв‘язок називається *невиродженим*, якщо він має рівно m ненульових координат і *виродженим*, якщо число його ненульових координат менше ніж m.

Означення 2.6. Базисний розв‘язок ЗЛП називається *опорним* (*опорним планом*), якщо він допустимий (невід‘ємний).

Базисні розв‘язки ЗЛП знаходять за допомогою метода повного виключення Жордана-Гауса.

Теорема 2.4. (*про опорні плани ЗЛП*).
Довільний опорний розв‘язок задачі лінійного програмування є кутовою точкою області допустимих розв‘язків і навпаки будь-яка кутова точка ОДР є опорним розв‘язком ЗЛП.

$\triangle$ $\boxed{\Rightarrow}$ Нехай $x = \left(\alpha_{10},\dots,\alpha_{m0},0,\dots,0\right)^T$ – опорний план з базисом $B = \left[A_1,\dots,A_m\right]$ деякої ЗЛП з системою обмежень $\sum_{j=1}^{n} A_j x_j = b.$

Нехай x не кутова точка, тоді розв‘язок є опуклою лінійною комбінацією деяких точок ОДР, що не співпадають з x, наприклад, x^1 і x^2:

$$x = \lambda x^1 + \left(1-\lambda\right) x^2,\ x^1 \ne x^2,\ 0 < \lambda < 1.$$

$$x^1 = \left(x_1^1,\dots,x_m^1,0,\dots,0\right)^T,$$

$$x^2 = \left(x_1^2,\dots,x_m^2,0,\dots,0\right)^T.$$

Підставимо x^1 і x^2 в систему обмежень

$$\sum_{j=1}^{m} A_j x_j^1 = b,\ \sum_{j=1}^{m} A_j x_j^2 = b$$

і віднімемо від першого друге

$$\sum_{j=1}^{m} A_j \left(x_j^1 - x_j^2 \right) = 0.$$

$A_1, \ldots, A_m$ – базис, отже вектори лінійно незалежні $\Rightarrow x_j^1 - x_j^2 = 0 \Rightarrow x_j^1 = x_j^2 \Rightarrow x^1 = x^2$, що суперечить припущенню. Отже, x – кутова точка.

$\boxed{\Leftarrow}$ Нехай $x = \left(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0 \right)^T, x_j > 0, j = \overline{1, m}.$

Щоб показати, що цей розв'язок є опорним, достатньо показати, що вектори $A_1, \ldots, A_m$ лінійно незалежні. Нехай це не так і вектори лінійно залежні. Тоді існує нетривіальна лінійна комбінація цих векторів, яка дорівнює нулеві, тобто $\exists \left| \alpha_1 \right| + \ldots + \left| \alpha_m \right| \neq 0$:

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j A_j = 0\,. \tag{2.4}$$

x – допустимий розв'язок, отже

$$\sum_{j=1}^{m} x_j A_j = b\,. \tag{2.5}$$

Помножимо (2.4) на $\varepsilon > 0$ і додамо до (2.5):

$$\sum_{j=1}^{m} \left(x_j + \varepsilon \alpha_j \right) A_j = b \Rightarrow$$

$x^1 = \left(x_1 + \varepsilon \alpha_1, \ldots, x_m + \varepsilon \alpha_m, 0, \ldots, 0 \right)^T$ – допустимий розв'язок системи обмежень задачі, аналогічно

$$\sum_{j=1}^{m} \left(x_j - \varepsilon \alpha_j \right) A_j = b \Rightarrow$$

$x^2 = \left(x_1 - \varepsilon \alpha_1, \ldots, x_m - \varepsilon \alpha_m, 0, \ldots, 0 \right)^T$ – також розв'язок. Виберемо ε так, щоб $x_j \pm \varepsilon \alpha_j \geq 0\ \forall j = \overline{1, m}$ (це завжди можна зробити, оскільки $x_j > 0$). Для цього достатньо покласти

$$\varepsilon = \min \left\{ \min_{j:\alpha_j > 0} \left(\frac{x_j}{\alpha_j} \right), \min_{j:\alpha_j < 0} \left(-\frac{x_j}{\alpha_j} \right) \right\}.$$

Отже, x^1 і x^2 – допустимі розв‘язки. Очевидно, що $x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$ і x є опуклою лінійною комбінацією x^1 і x^2, а це суперечить умові, що x – кутова точка. Отже, вектори $A_1, \ldots, A_m$ лінійно незалежні і x – опорний план ЗЛП. ▲