Лекція 1. Поняття про моделювання економічних процесів. Загальна задача лінійного програмування

1.1. Основні поняття та визначення. Ефективність операцій.

Означення 1.1. *Економіко-математичні методи* – це дисципліна, яка займається вивченням та розробкою процедур, що допомагають процесу прийняття рішення, тобто це комплекс наукових методів для розв‘язання задач ефективного управління в економіці.

Ця дисципліна за предметом і методами вивчення близька до дослідження операцій (Operation Research) і науки про управління (Management science).

Означення 1.2. *Операція* – це будь-яка дія або система дій, що об’єднані єдиним задумом і спрямовані на досягнення визначеної цілі.

Означення 1.3. Під *дослідженням операцій* розуміють комплексну математичну дисципліну, що займається побудовою, аналізом і застосуванням математичних моделей прийняття оптимальних рішень при проведенні операцій.

Означення 1.4. Характеристики дій (фактори операцій), які змінювати в умовах операцій неможливо вважаються *параметрами операцій*.

Означення 1.5. Характеристики дій, за рахунок зміни яких проявляється позитивний результат називають *змінними* або *керуючими параметрами*.

Будь-який вибір, в залежності від дослідника, керуючих параметрів носить назву *розв’язок* (рішення, план операції чи стратегія).

Розв’язки можуть бути такими, що задовольняють чи не задовольняють технічним та (або) економічним, та (або) екологічним, та (або) соціальним обмеженням, і відповідно носять назву *допустимі* або *недопустимі*. Зрозуміло, що останні відкидають, а серед перших обирають оптимальні, тобто ті, які у деякому розумінні мають перевагу над іншими.

Припустимо, що нам треба виділити окрему операцію. Метою операції є досягнення її найбільшої ефективності. Під ефективністю розуміємо ступінь її налаштування на виконання поставленої задачі. Чим краще організована операція, тим вона ефективніша.

Означення 1.6. *Критерієм оцінки* (*показником ефективності* або *цільовою функцією*) Z називається функція фізичної величини чи сукупності фізичних величин, обчислення або вимірювання якої дозволяє кількісно оцінити результат виконання операцій.

Науковий метод при прийнятті рішення містить наступні основні етапи:

1. Формалізацію початкової (вихідної) проблеми:

а) опис можливих альтернативних розв‘язків,

б) визначення цілі (цілей),

в) з‘ясування обмежень, що накладаються на можливі розв‘язки.

2. Побудова математичної моделі – переведення формалізованої задачі на мову математичних співвідношень.

3. Розв‘язання проблеми – застосування відомих алгоритмів або розробка нових.

4. Перевірка адекватності моделі – відповідність поведінки моделі вихідній проблемній ситуації.

5. Реалізацію розв‘язку – переведення результатів розв‘язку моделі в рекомендації, зрозумілі для осіб, що приймають рішення.

Задачі, що розглядаються в ММЕ можна кваліфікувати в залежності від природи і властивостей операцій, характеру проблем і особливостей математичних методів.

Часто задачі, що розглядаються мають оптимізаційний характер, тобто потрібно знайти змінні, що задовольняють деяким умовам і перетворюють у максимум (мінімум) деяку цільову функцію. В залежності від властивостей умов і цільової функції задачі економіко-математичні методи поділяють на:

1) методи лінійного програмування;
2) методи цілочислового програмування;
3) методи нелінійного програмування;
4) методи динамічного програмування;
5) методи стохастичного програмування;
6) методи багатокритеріальної оптимізації;
7) методи теорії ігор.

Термін «програмування» в екстремальних задачах пов‘язаний з економічною природою задач що розглядаються і є невдалим перекладом слова «programming» – планування.

Однією з найважливіших задач є оптимізації є задача математичного програмування, яка полягає в пошуку екстремуму функції $f(x)$ за умов $g_i(x) \le 0$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$. Якщо $f(x)$ і $g_i(x)$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$ – лінійні, то задача називається задачею лінійного програмування (ЗЛП).

За оцінками спеціалістів $\approx 80-85\%$ практичних задач оптимізації відносяться до задач лінійного програмування.

Вперше постановка ЗЛП та один з методів її розв‘язання були запропоновані Л.В. Канторовичем у роботі «Математические методы организации и планирования производства» у 1939 році. У 1947 році Дж. Данціг розробив симплексний метод (симплекс-метод) – один з основних методів розв‘язування ЗЛП.

1.2. Приклади задач лінійного програмування.

1. Задача про розподіл ресурсів (планування виробництва).

Нехай деяке підприємство може реалізувати n виробничо-технологічних процесів $P_1,\dots,P_n$ використовуючи для цього ресурси $R_1,\dots,R_m$. Відомо, що

а) підприємство має b_i одиниць ресурсу R_i, $i=\overline{1,m}$;

б) витрати ресурсу R_i на одиницю продукції, що виготовляється за технологією P_j дорівнює a_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$;

в) реалізація одиниці продукції, виготовленої за технологією P_j приносить прибуток c_j.

Задача полягає у визначенні об‘єму виробництва x_j продукції за технологією P_j, $j=\overline{1,n}$, що максимізує за цих умов прибуток підприємства.

Сформульована задача формально зводиться до знаходження вектора $x=(x_1,\dots,x_n)^T$, що максимізує функцію

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i=\overline{1,m},$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}.$$

2. Задача про раціон (задача про дієту).

Харчовий раціон може складатися з продуктів $P_1,\dots,P_n$. Відомо, що в одиниці продукту P_j міститься a_{ij} одиниць поживної речовини V_i, $i=\overline{1,m}$. Нехай c_j – вартість одиниці продукту P_j, $j=\overline{1,n}$. Припускається, що харчовий раціон повинен містити не менше b_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$ одиниць речовини V_i. При вказаних обмеженнях знайти раціон найменшої вартості.

Формалізуємо задачу. Нехай x_j – кількість продукту P_j у шуканому раціоні. Тоді вектор $x=(x_1,\dots,x_n)^T$ визначає деякий раціон вартістю $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$. Кількість поживної речовини V_i у раціоні x дорівнює $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$.
Таким чином, потрібно мінімізувати функцію

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \quad i=\overline{1,m},$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}.$$

3. Задача про розкрій матеріалів.

Значна частина матеріалів надходить на виробництво певними одиницями стандартних розмірів. Для використання його доводиться розрізати на частини, щоб отримати заготовки потрібних розмірів. Виникає потреба мінімізації відходів матеріалів. Нехай потрібно, використовуючи один з $R_1,\dots,R_n$ способів розкрою одержати $P_1,\dots,P_m$ одиниць заготовок, a_{ij}– число заготовок i-го виду, одержаних за допомогою j-го способу розкрою, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, b_i – план випуску заготовок i-го виду, c_j – величина відходів при j-му варіанті розкрою.

Через x_j позначимо кількість одиниць вихідного матеріалу, які потрібно розрізати j-им способом. Тоді потрібно знайти вектор $x=(x_1,\dots,x_n)^T$, який мінімізує функцію

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i=\overline{1,m},$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}.$$

4. Задача про перевезення (транспортна задача).

У пунктах P_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$ виробляється однорідний продукт, причому в P_i виробляється a_i одиниць цього продукту. У пункті Q_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ споживається

вається b_j одиниць цього ж продукту. Припустимо, що $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Нехай c_{ij} - собівартість перевезення одиниці продукту з пункту виробництва P_i в пункт споживання Q_j (транспортні витрати). Необхідно знайти план перевезень таким чином, щоб задовольнити потреби всіх споживачів, мінімізуючи загальні транспортні витрати.

Нехай x_{ij} – невідома кількість продукту, що планується для перевезення з P_i в Q_j. Тоді задача полягає у знаходженні матриці $X = \left(x_{ij}\right), i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$, що мінімізує загальні транспортні витрати

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1,m},$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, j = \overline{1,n},$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}\right).$$

5. Задача про інвестиції.

Інвестиційна проблема полягає у розподілі фондів та виробництва на споживання та інвестиційні проекти враховуючи фундаментальне співвідношення

Споживання + інвестиції $\leq$ виробництво + капітал (обсяг інвестування)

Інвестор хоче максимально збільшити загальну віддачу від інвестицій. Інвестиційна діяльність може включати придбання акцій в проектах, виробничий термін яких триває кілька років, придбання депозитних сертифікатів або придбання облігацій різного терміну погашення.

Інвестиційна діяльність - це будь-який процес, який вимагає розміщення капіталу з метою отримання прибутку або досягнення іншого корисного ефекту.

Нехай маємо

1) часовий горизонт, $i = \overline{1,m}$;

2) капітал, E_i;

3) споживання, C_i;

4) інвестиційна діяльність (проекти, депозитні сертифікати, облігації тощо), a_{ij} та b_{ij}, де a_{ij} - діяльність що вимагає витрат на проект j, b_{ij} -

діяльність, яка приносить дохід (повернення грошей) з проекту j в рік i, $j=\overline{1,n}$;

5) ціна проектів на кінець часового горизонту та процентні ставки за фінансовими операціями, P_j.

Необхідна початкова інформація складається з фондів, споживання, проектних витрат та повернень і кінцевих вартостей проектів.

Позначимо через $x=\left(x_1,\ldots,x_n\right)^T$ інвестиційні проекти.

Таким чином, математична модель початкових інвестицій має вигляд

$$Z\left(x\right)=\sum_{j=1}^{n}P_j x_j \to \max$$

за умов

$$C_i+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le E_i+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_j, \quad i=\overline{1,m}$$

$$x_j \ge 0, j=\overline{1,n}.$$

1.3. Загальна задача лінійного програмування.

Загальна задача лінійного програмування (ЗЛП) формулюється наступним чином. Знайти вектор $x=\left(x_1,\ldots,x_n\right)^T \in \mathbb{R}^n$, що максимізує (мінімізує) лінійну функцію

$$Z\left(x\right)=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j \tag{1.1}$$

і задовольняє систему лінійних обмежень

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\left\{\le,=,\ge\right\}b_i, i=\overline{1,m}, \tag{1.2}$$

$$x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,k}, \ k \le n. \tag{1.3}$$

Обмеження (1.3) називають прямими і, зазвичай, не включають до непрямих обмежень (1.2).

Вектор x, що задовольняє умовам (1.2), (1.3) називається *допустимим розв‘язком* (вектором, точкою, планом) ЗЛП.

Множина допустимих розв‘язків ЗЛП називається *допустимою областю* (ОДР) і позначається G:

$$G=\left\{x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n:\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\{\le,=,\ge\}b_i,\right.$$
$$\left. i=\overline{1,m},\quad x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,k},\ k\le n\right\}.$$

Функція $Z(x)$, яка характеризує якість виконання задачі і екстремум якої потрібно знайти називається *цільовою*.

Вектор $x^*\in G$, що доставляє цільовій функції максимум (мінімум) називається *оптимальним розв‘язком* (*оптимальним планом*) ЗЛП і часто записується у вигляді

$$x^*=\underset{x\in G}{\arg\max}(\min)Z(x).$$

Величина $Z(x^*)$ називається *оптимальним значенням цільової функції*.

Умову того, що функцію $Z(x)$ потрібно максимізувати (мінімізувати) записують так

$$Z(x)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to\max(\min).$$

1.4. Стандартна форма задачі лінійного програмування.

Якщо всі обмеження задачі лінійного програмування є рівняннями і всі змінні задовольняють умовам невід‘ємності, то така ЗЛП називається *стандартною*. Будемо користуватись наступними формами запису канонічної ЗЛП.

1. Координатна форма стандартної ЗЛП.

$$Z(x)=c_1x_1+\dots+c_nx_n\to\max(\min) \tag{1.4}$$

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1;\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2;\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_{1n}=b_m,\end{cases} \tag{1.5}$$

$$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,n} \tag{1.6}$$

або

$$Z(x)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to\max(\min) \tag{1.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\quad i=\overline{1,m}, \tag{1.8}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{1.9}$$

2. Векторна форма стандартної ЗЛП.

$$Z(X) = \langle c, x \rangle \to \max(\min) \tag{1.10}$$

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n = b, \tag{1.11}$$

$$x \geq 0, \tag{1.12}$$

де $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$, $A_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})^T$, $j = \overline{1,n}$, $b = (b_1, \ldots, b_m)^T$, $0 = (0, \ldots, 0)^T$.

3. Матрична форма стандартної ЗЛП.

$$Z(x) = c^T x \to \max(\min) \tag{1.13}$$

$$Ax = b,\ x \geq O, \tag{1.14}$$

де $A = (a_{ij}),\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$ – матриця умов, стовпцями якої є вектори умов A_j, $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$, $b = (b_1, \ldots, b_m)^T$.

Часто використовують ЗЛП, які називаються канонічними

$$Z(x) = c^T x \to \max, \qquad Z(x) = c^T x \to \min,$$
$$Ax \leq b,\ x \geq O, \qquad Ax \geq b,\ x \geq O.$$

1.5. Перехід до стандартної форми ЗЛП.

В більшості методів розв‘язання ЗЛП припускається, що система обмежень складається з рівнянь і природних умов невід‘ємності змінних. Але при складанні математичних моделей економічних задач обмеження формуються у вигляді системи нерівностей, тому необхідно вміти переходити в ЗЛП від нерівностей до рівнянь.

Обмеження-нерівність

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$$

перетворюється в обмеження-рівність введенням в ліву частину додаткової (балансової) змінної $x_{n+1} \geq 0$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+1} = b_i.$$

Теорема 1.1. Кожному розв‘язку $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)^T$ нерівності

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$ відповідає єдиний розв‘язок $\overline{\boldsymbol{\beta}} = \left(\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta_{n+1}\right)^T$ рівняння $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+1} = b_i$ і нерівності $x_{n+1} \ge 0$ і навпаки.

$\triangle$ $\boxed{\Rightarrow}$ Нехай $\boldsymbol{\beta} = \left(\beta_1, \ldots, \beta_n\right)^T$ – розв‘язок нерівності. Тоді $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j \le b_i$ або $0 \le b - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j = \beta_{n+1}$. Підставимо в рівняння замість змінних $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ змінні $\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta_{n+1}$. Тоді

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j + \beta_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j + \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j\right) = b_i .$$

Отже, $\overline{\boldsymbol{\beta}} = \left(\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta_{n+1}\right)^T$ – розв‘язок рівняння.

$\boxed{\Leftarrow}$ Нехай $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ – розв‘язок рівняння, що задовольняє нерівності $x_{n+1} \ge 0$, тобто $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j + \beta_{n+1} = b_i$ і $\beta_{n+1} \ge 0$. Відкинемо в лівій частині величину β_{n+1}, одержимо $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j \le b_i$. Отже, $\boldsymbol{\beta}$ – задовольняє нерівності. ▲

Таким чином, якщо:

1) задано нерівності

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i = \overline{1, m}, \tag{1.15}$$

то додаючи балансові змінні $x_{n+i} \ge 0,\ i = \overline{1, m}$ одержуємо рівняння:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i,\ i = \overline{1, m}, \tag{1.16}$$

2) задано нерівності

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i,\ i = \overline{1, m}, \tag{1.17}$$

то віднімаючи балансові змінні $x_{n+i} \ge 0,\ i = \overline{1, m}$ одержуємо рівняння:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{1.18}$$

3) в умові задачі не всі $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}$, то кожну таку змінну замінюють на різницю $x_j = x_j' - x_j'',$ де $x_j' \geq 0,\ x_j'' \geq 0.$

Балансові змінні вводять у цільову функцію з нульовими коефіцієнтами, тому цільова функція $Z(x)$ не змінює значення.

Зауваження 1.1. Інколи виникає потреба перейти від задачі знаходження мінімуму до задачі знаходження максимуму і навпаки. Для цього достатньо помножити $Z(x)$ на -1 (змінити знаки коефіцієнтів цільової функції), а все інше залишити без зміни.

Тобто

$$Z(x) \to \max \Leftrightarrow -Z(x) \to \min,$$

причому

$$\max Z(x) = -\min\left(-Z(x)\right).$$

Оптимальні плани x^* обох задач співпадають.