

## Лекція 6.

### Синтез алгоритму цифрового автоматичного керування методом бажаних передавальних функцій

#### Розділ 6.1. Метод бажаних передавальних функцій

Метод бажаних передавальних функцій складається із наступних етапів:

1. Побудова дискретної передавальної функції ЦОМ та поліноміального рівняння її синтезу у загальній формі.
2. Формулювання умов фізичної реалізуємості передавальної функції ЦОМ.
3. Побудова дискретної передавальної функції ЦОМ та поліноміального рівняння її синтезу у формі, що забезпечують фізичну реалізуємість цифрового алгоритму та задану якість процесу керування

Перейдемо до розгляду етапів методу.

#### Етап 1.

Припустимо, що структура математичної моделі ЦСАК відповідає структурі, що представлена на рис. 4.6. Це означає, що розімкнена система являє собою послідовне з'єднання цифрового регулятора, який побудовано на базі ЦОМ (микропроцесора), та приведенного дискретного об'єкта керування (ПДОК).  
Передавальна функція замкненої ЦСАК за вихідним сигналом матиме вигляд:

$$H_x(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{D(z) \cdot W_{\text{ПД}}(z)}{1 + D(z) \cdot W_{\text{ПД}}(z)} = \frac{W_P(z)}{1 + W_P(z)}, \text{ де } W_P(z), D(z), W_{\text{ПД}}(z) - \text{відповідно}$$

Z-передавальні функції (дискретні передавальні функції) розімкненої системи  $W_P(z) = D(z) \cdot W_{\text{ПД}}(z)$ , ЦОМ, ПДОК.

Припустимо, що:

- 1) Z-передавальна функція замкненої ЦСАК за вихідним сигналом дорівнює бажаній  $H_x(z) = H_{\text{XB}}(z)$ ;
- 2) Z-передавальна функція ПДОК відома із точністю до номінальних значень його параметрів  $W_{\text{ПД}}(z) = W_{\text{ПД0}}(z)$ .

Тоді Z-передавальну функцію ЦОМ, тобто алгоритм цифрового автоматичного керування, можливо обчислити за формулою

$$D(z) = \frac{1}{W_{\text{ПДО}}(z)} \cdot \frac{H_{\text{ХБ}}(z)}{1 - H_{\text{ХБ}}(z)}.$$

Розглянемо більш детально номінальну математичну модель ПДОК  $W_{\text{ПДО}}(z)$  та бажану математичну модель замкненої ЦСАК  $H_{\text{ХБ}}(z)$ .

Представимо  $W_{\text{ПДО}}(z)$  у вигляді

$$W_{\text{ПДО}}(z) = \frac{P_0(z)}{Q_0(z)} \cdot z^{-L_{\text{ПДО}}}, \text{ де } L_{\text{ПДО}} - \text{ номінальне запізнення, що існує у об'єкті}$$

керування і залежить лише від фізичного принципу функціонування цього об'єкту ( $L_{\text{ПДО}}$  або 0, або ціле додатне число);  $P_0(z)$ ,  $Q_0(z)$  - поліноми відносно змінної  $z$  (ступінь полінома  $Q_0(z)$  не менша за ступінь полінома  $P_0(z)$ ).

Виконаємо операцію факторизації поліномів  $P_0(z)$ ,  $Q_0(z)$ , тобто представимо їх у вигляді  $P_0(z) = P_{0+}(z) \cdot P_{0-}(z)$ ,  $Q_0(z) = Q_{0+}(z) \cdot Q_{0-}(z)$ , де  $P_{0\pm}(z)$ ,  $Q_{0\pm}(z)$  - поліноми у яких корені розташовані в середині кола одиничного радіуса («+»), та поліноми, корені яких розташовані на та поза колом одиничного радіуса («-»).

Представимо  $H_{\text{ХБ}}(z)$  та  $1 - H_{\text{ХБ}}(z)$  відповідно у вигляді

$$H_{\text{ХБ}}(z) = A(z) \cdot \frac{M(z)}{G(z)} \cdot z^{-L_B} \text{ та } 1 - H_{\text{ХБ}}(z) = B(z) \cdot \frac{N(z)}{G(z)},$$

де  $A(z)$ ,  $M(z)$ ,  $B(z)$ ,  $N(z)$ ,  $G(z)$  - поліноми відносно змінної  $z$ ;  $L_B$  - бажане запізнення ( $L_B$  або 0, або ціле додатне число).

Дискретна передавальної функції (Z-передавальна функція) ЦОМ у загальній формі набуває вигляду

$$D(z) = \frac{Q_{0+}(z)}{P_{0+}(z)} \cdot \frac{Q_{0-}(z)}{P_{0-}(z)} \cdot \frac{A(z)}{B(z)} \cdot \frac{M(z)}{N(z)} z^{-(L_B - L_{\text{ПДО}})},$$

що і треба було отримати при виконанні даного етапу методу.

Підставимо вираз для  $H_{\text{ХБ}}(z)$  у вираз для обчислення  $1 - H_{\text{ХБ}}(z)$  і отримаємо поліноміальне рівняння синтезу дискретної передавальної функції ЦОМ у загальній формі

$$G(z) \cdot z^{L_B} = A(z) \cdot M(z) + B(z) \cdot N(z) \cdot z^{L_B},$$

що і треба було отримати при виконанні даного етапу методу.

## Етап 2.

1). Враховуючи фізичний зміст запізнення, яке може існувати у об'єкті керування, бажане запізнення не може бути меншим за реальне (номінальне) запізнення :

$$L_B \geq L_{\text{ПДО}} .$$

2). Враховуючи умову фізичної реалізованості алгоритму роботи ЦОМ, який задається її передавальною функцією  $D(z)$ , порядок бажаної передавальної функції  $H_{XB}(z)$ , який позначимо  $n_B$ , повинен бути не меншим ніж порядок передавальної функції  $W_{\text{ПДО}}(z)$ , який позначимо  $n_{\text{ПДО}}$ , тобто

$$n_B \geq n_{\text{ПДО}} .$$

Нагадаємо, що порядком передавальної функції називають різницю степенів поліномів знаменника та чисельника передавальної функції.

## Етап 3.

### Розглянемо умови забезпечення бажаної якості керування

**Умова 1.** Не чуттєвість ЦСАК до відхилення параметрів параметрів об'єкту керування від розрахункових значень (тобто, незалежність ЦСАК від варіації параметрів об'єкту керування).

Цю умову ще називають «умовою грубості ЦСАК». ЦСАК називають грубою («робастною»), коли при малих параметричних збуреннях виникають малі зміни величин, що характеризують якість процесу керування.

Припустимо, що  $A(z) = P_{0-}(z)$ ,  $B(z) = Q_{0-}(z)$ . Це означає, що в математичній моделі об'єкту керування із істинними значеннями параметрів, а не номінальними, залишаються не скомпенсованими нулі і полюси, які перебувають на та поза колом одиничного радіусу. Це необхідно для того, щоб уникнути нестійкості системи в наслідок недокомпенсації нулів та полюсів, що розташовані на та поза колом одиничного радіусу.

Дискретна передавальна функція ЦОМ та **перше поліноміальне рівняння** її синтезу набувають вигляду відповідно

$$D(z) = \frac{Q_{0+}(z)}{P_{0+}(z)} \cdot \frac{M(z)}{N(z)} z^{-(L_B - L_{\text{ЦОМ}})},$$

$$G(z) \cdot z^{L_B} = P_{0-}(z) \cdot M(z) + Q_{0-}(z) \cdot N(z) \cdot z^{L_B}.$$

**Умова 2.** Не чуттєвість ЦСАК до варіації параметрів об'єкта керування та виключення додаткових перехідних процесів в управляючому сигналі на виході ЦОМ.

Для виконання другої умови припускаємо, що

$$A(z) = P_0(z), B(z) = Q_{0-}(z).$$

Дискретна передавальна функція ЦОМ та **друге поліноміальне рівняння** її синтезу набувають вигляду відповідно

$$D(z) = Q_{0+}(z) \cdot \frac{M(z)}{N(z)} z^{-(L_B - L_{\text{ЦОМ}})},$$

$$G(z) \cdot z^{L_B} = P_0(z) \cdot M(z) + Q_{0-}(z) \cdot N(z) \cdot z^{L_B}.$$

**Умова 3.** Не чуттєвість ЦСАК до варіації параметрів об'єкта керування виключення додаткових перехідних процесів в управляючому сигналі на виході ЦОМ та додаткових перехідних процесів на виході ЦСАК.

Для виконання третьої умови припускаємо, що

$$A(z) = P_0(z), B(z) = Q_0(z).$$

Дискретна передавальна функція ЦОМ та **третє поліноміальне рівняння** її синтезу набувають вигляду відповідно

$$D(z) = \frac{M(z)}{N(z)} z^{-(L_B - L_{\text{ЦОМ}})},$$

$$G(z) \cdot z^{L_B} = P_0(z) \cdot M(z) + Q_0(z) \cdot N(z) \cdot z^{L_B}.$$

**Умова 4.** Не чуттєвість ЦСАК до варіації параметрів об'єкта керування, виключення додаткових перехідних процесів в управляючому сигналі на виході ЦОМ, виключення додаткових перехідних процесів на виході ЦСАК та виконання вимоги стосовно забезпечення нульової вимушеної помилки при поліноміальній вхідній дії.

Для виконання четвертої умови припускаємо, що

$A(z) = P_0(z)$ ,  $B(z) = Q_0(z) \cdot (z-1)^{L_A}$ , де  $L_A$  - степінь астатизму ЦСАК ( $L_A$  - або нуль, або ціле додатне число).

Дискретна передавальна функція ЦОМ та **четверте поліноміальне рівняння** її синтезу набувають вигляду відповідно

$$D(z) = (z-1)^{-L_A} \cdot \frac{M(z)}{N(z)} z^{-(L_B - L_{\text{цд}})},$$

$$G(z) \cdot z^{L_B} = P_0(z) \cdot M(z) + Q_0(z) \cdot N(z) \cdot (z-1)^{L_A} \cdot z^{L_B}.$$

### Зауваження.

1. За звичай, для спрощення розрахунків, забезпечення стійкості замкненої ЦСАК та бажаних властивостей перехідного процесу на її виході приймають  $G(z) = z^k$  або  $G(z) = (z+a)^k$ , або  $G(z) = z^k \cdot (z+a)^k$ ,  $|a| < 1$ .
2. Якщо  $G(z) = z^k$ . То характеристичний поліномпередавальської функції замкненої ЦСАК має  $k$  коренів, що дорівнюють нулю. Це означає, що перехідний процес теоретично буде тривати кінцевий час. В цьому випадку кажуть, що ЦСАК має імпульсну характеристику із кінцевим часом тривалості.

## Розділ 6.2. Приклад синтезу алгоритму цифрового автоматичного керування методом бажаних передавальних функцій

Припустимо, що необхідно побудувати одно каналну ЦСАК (див. рис. 4.6) у боковому каналі керування мінідроном із математичною моделлю приведенного неперервного об'єкту керування, яка представлена у вигляді неперервної передавальної функції

$$W_{\text{П}}(s) = W_H(s) \cdot W_{E_0}(s), \text{ де}$$

$$W_H(s) = \frac{7}{0.7 \cdot s^2 + s} - \text{передавальна функція узагальненого неперервного об'єкту}$$

керування;  $W_{E_0}(s)$  - передавальна функція екстраполятора нульового порядку.

Вважаємо, інформація про частотний діапазон дії збурень на вході АЦП відсутня.

Синтез алгоритму роботи цифрового регулятора виконаємо із використанням функцій системи комп'ютерної математики MATLAB+Simulink за наступною методикою:

1. Побудуємо математичну модель ПДОК.
2. Застосуємо друге поліноміальне рівняння для синтезу алгоритму цифрового автоматичного керування.
3. Виконаємо імітаційне моделювання.
4. Зробимо висновки

## **Виконання етапів методики**

### **Етап 1.**

1.1. Побудуємо передавальну функцію узагальненого неперервного об'єкту керування (УНОК):

$$\mathbf{WH} = \text{tf}([7], [0.7 \ 1 \ 0])$$

Transfer function:

$$7$$

-----

$$0.7 s^2 + s$$

1.2. Побудуємо передавальну функцію для замкненого контуру із УНОК:

$$\mathbf{H} = \mathbf{WH} / (1 + \mathbf{WH})$$

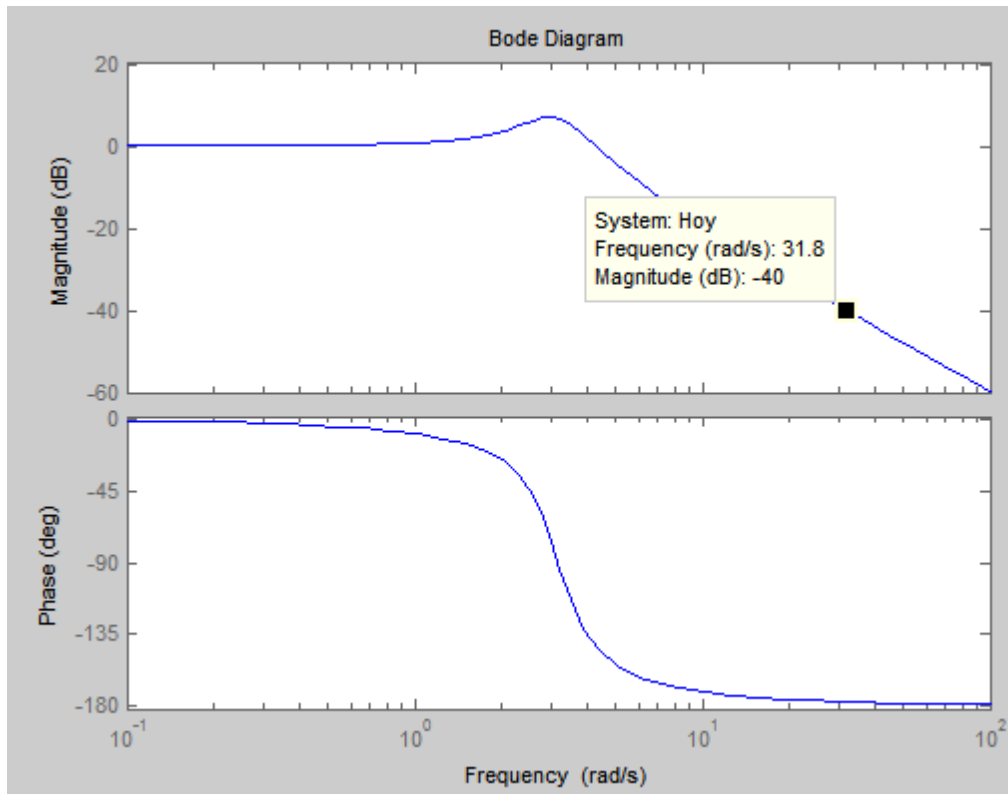
Transfer function:

$$4.9 s^2 + 7 s$$

-----

$$0.49 s^4 + 1.4 s^3 + 5.9 s^2 + 7 s$$

1.3. Побудуємо діаграму **bode(H)**:



**Рис. 6.1. Діаграма Бодє, яка використовується для обчислення верхньої граничної частоти корисного сигналу на вході АЦП**

1.4. Визначаємо верхню граничну частоту корисного сигналу на вході АЦП, як частоту на якій у 100 разів зменшується амплітуда вихідного сигналу замкнутого контуру із передавальною функцією  $H$  порівняно із амплітудою на низьких частотах.

Бачимо, що в даному випадку  $\omega_B = 31,8$  рад/с;

1.5. За теоремою Котельнікова обчислюємо  $T_0$  :

$$T_0 = \pi / 31,8$$

$$T_0 = 0,0991.$$

1.6. Побудуємо передавальну функцію приведенного дискретного об'єкта керування (ПДОК):

$$W_{pd} = c_2 d( WH, T_0)$$

Transfer function:

$$0,04687 z + 0,04471$$

-----

$$z^2 - 1,868 z + 0,868$$

Sampling time (seconds): 0.099104,

що і треба було отримати після виконання першого етапу методики.

## Етап 2.

2.1. Виконаємо факторизацію поліномів чисельника та знаменника передавальної функції ПДОК.

Знайдемо полюси передавальної функції ПДОК:

**p=pole( Woy)**

p =

1.0000

0.8680

$$Q_0(z) = Q_{0+}(z) \cdot Q_{0-}(z);$$

$$Q_0(z) = (z - 0.868) \cdot (z - 1),$$

Знайдемо нулі передавальної функції приведенного дискретного ОУ:

**z=zero( Woy)**

z = -0.9539

$$P_0(z) = P_{0+}(z) \cdot P_{0-}(z),$$

$$P_0(z) = 0.04687(z - (-0.9539)) * 1 = 0.04687 * z + 0.04471$$

2.2. Побудуємо друге поліноміальне рівняння синтезу із врахування того факту, що запізнення в математичній моделі ПДОК відсутнє, тобто

$$L_{ПДО} = 0:$$

$$G(z) = P_0(z) \cdot M(z) + Q_{0-}(z) \cdot N(z), \text{ де } L_B = L_{ПДО} = 0, L_B - \text{бажане запізнення.}$$

Розглянемо два варіанти завдання поліномів  $G(z), M(z), N(z)$ .

### Варіант 1.

Задамо  $G(z) = (z - 0.5)^2$ ;  $M(z) = m_0$ ;  $N(z) = n_1 * z + n_0$ , де  $m_0, n_0, n_1$  - невідомі коефіцієнти поліномів, що підлягають визначенню.

Знайдемо ці коефіцієнти із використанням другого поліноміального рівняння синтезу методом невизначених коефіцієнтів:

$$(z-0,5)^2 = (0,04687 * z + 0,04471) \cdot m_0 + (z-1) \cdot (n_1 * z + n_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n_1 = 1; \\ n_0 = -0,1279; \\ m_0 = 2,7598. \end{cases}$$

Шуканий алгоритм цифрового автоматичного керування синтезований

методом бажаних передавальних функцій із використанням другого поліноміального рівняння набуває вигляду

$$D(z) = Q_{0+}(z) \cdot \frac{M(z)}{N(z)} \cdot z^{-(S\delta - S_n)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(z) = (z-0,868) \cdot \frac{m_0}{n_1 z + n_0} = 2,7298 * \frac{z-0,868}{z-0,1279},$$

що і треба було отримати.

## Варіант 2.

Задамо  $G(z) = (z)^2$ ;  $M(z) = m_0$ ;  $N(z) = n_1 * z + n_0$ , де  $m_0, n_0, n_1$  - невідомі коефіцієнти поліномів, що підлягають визначенню.

Знайдемо ці коефіцієнти із використанням другого поліноміального рівняння синтезу методом невизначених коефіцієнтів:

$$(z)^2 = (0,04687 * z + 0,04471) \cdot m_0 + (z-1) \cdot (n_1 * z + n_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n_1 = 1; \\ n_0 = 0,4882; \\ m_0 = 10,9194. \end{cases} \quad \vdots$$

Шуканий алгоритм цифрового автоматичного керування синтезований

методом бажаних передавальних функцій із використанням другого поліноміального рівняння набуває вигляду

$$D(z) = Q_{0+}(z) \cdot \frac{M(z)}{N(z)} \cdot z^{-(S\delta - S_n)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (z-0,868) \cdot \frac{m_0}{n_1 z + n_0} = 10,9194 * \frac{z-0,868}{z-0,4882},$$

що і треба було отримати.

### Етап 3.

Результати імітаційного моделювання представлені на рис. 6.2,6.3.

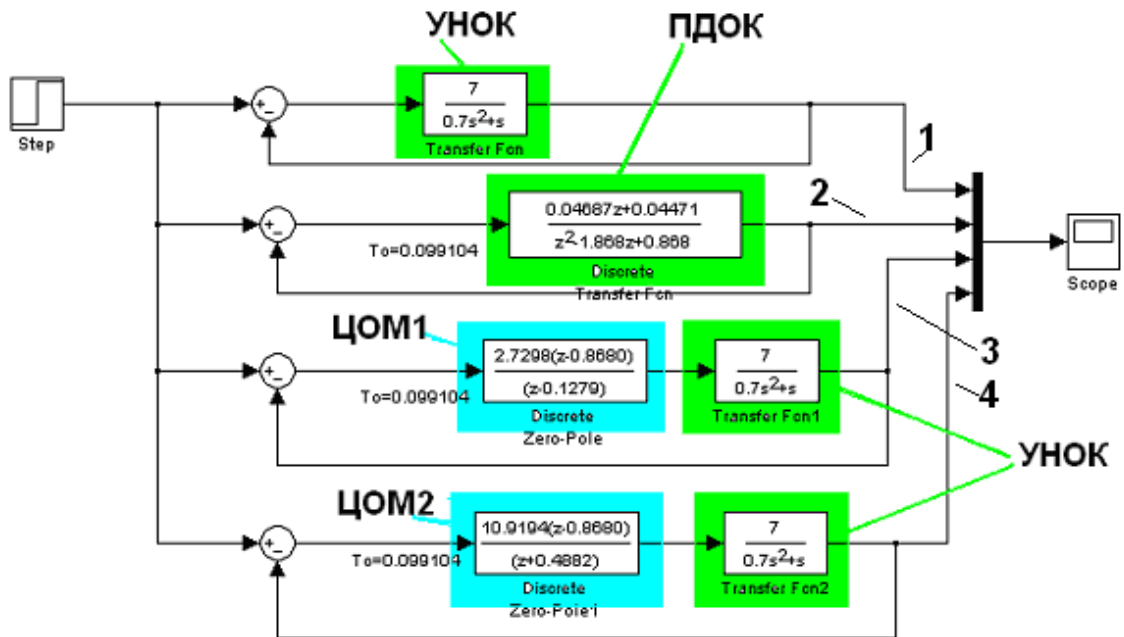


Рис. 6.2. Схема імітаційного експерименту: передавальні функції ЦОМ1 та ЦОМ2 синтезовані у відповідності із варіантами 1 та 2

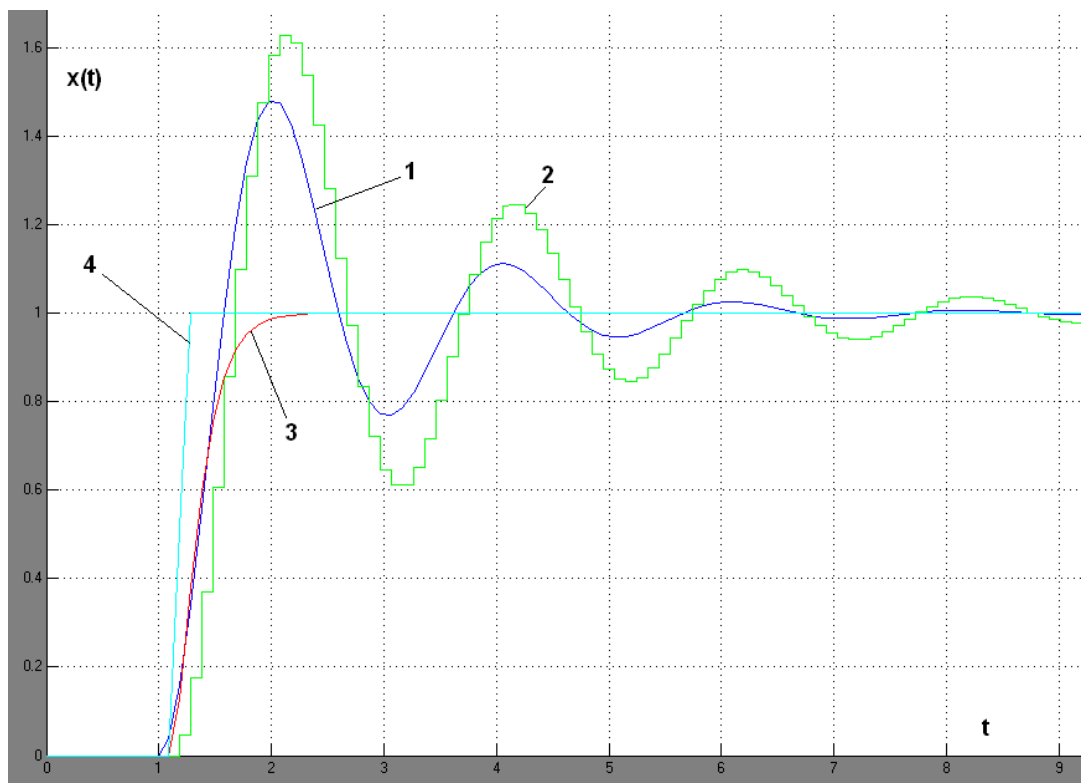


Рис. 6.3. Перехідні процеси на виходах моделей, що представлені на рис. 6.1

#### Етап 4.

За результатами виконання усіх етапів методики можна зробити наступні висновки:

1. Викладені у лекції теоретичні положення повністю підтверджені імітаційним комп'ютерним експериментом.
2. Із використанням другого поліноміального рівняння синтезу вдалося побудувати аперіодичну ЦСАК та ЦСАК із мінімальним кінцевим часом тривалості перехідного процесу.

#### Додаток до методики

Пошук невідомих коефіцієнтів із використанням системи символьних обчислень СКМ MATLAB

**% Права частина другого поліноміального рівняння синтезу**

```
>> G=sym('(0.04687*z+0.04471)*mo+(z-1)*(n1*z+no)');
```

```
>> Gz=collect(G,'z')
```

```
Gz = n1*z^2+(.4687e-1*mo-1.*n1+no)*z+.4471e-1*mo-1.*no
```

```
>> pretty(Gz)
```

2

$n1 z + (.04687 mo - 1. n1 + no) z + .04471 mo - 1. no$

**%Права частина другого поліноміального рівняння синтезу цифрового регулятора мінус його ліва частина виду  $G(z)=(z-0.5)^2$**

```
>> Gz1=Gz-sym('(z-0.5)^2')
```

```
Gz1 = n1*z^2+(.4687e-1*mo-1.*n1+no)*z+.4471e-1*mo-1.*no-(z-.5)^2
```

```
>> Gz1=collect(Gz1,'z');
```

```
>> pretty(Gz1)
```

2

$(n1 - 1.) z + (.04687 mo - 1. n1 + no + 1.0) z - .25 + .04471 mo - 1. no$

**% Пошук невідомих коефіцієнтів поліноміального рівняння синтезу цифрового регулятора**

```
>> syms no mo n1
```

```
>> f1=sym('n1-1.');
```

```
>> f2=sym('.04687*mo - 1.*n1 + no + 1.0');
```

```
>> f3=sym('- .25 + .04471*mo - 1.*no');
```

```
>> s=solve(f1,f2,f3,no,mo,n1)
```

```
s =
```

```
mo: [1x1 sym]
```

```
n1: [1x1 sym]
```

```
no: [1x1 sym]
```

```
>> s.n1
```

```
ans = 1.
```

```
>> s.no
```

```
ans = -0.12794824197423018126228434155929
```

```
>> s.mo
```

```
ans = 2.7298536798427604280410569993448
```

**% ПФ цифрового регулятора  $D(z)=2.7298*(z-0.8680)/(z-0.1279)$**

**% Права частина другого поліноміального рівняння синтезу цифрового регулятора мінус його ліва частина виду  $G(z)=z^2$**

```
>> Gz2=Gz-sym('z^2');
```

```
>> pretty(Gz2)
```

2

2

$n1 z^2 + (.04687 mo - 1. n1 + no) z + .04471 mo - 1. no - z$

```
>> Gz2=collect(Gz2,'z')
```

```
Gz2 = (n1-1.)*z^2+(.4687e-1*mo-1.*n1+no)*z+.4471e-1*mo-1.*no
```

```
% Пошук невідомих коефіцієнтів поліноміального рівняння синтезу цифрового  
% регулятора
```

```
>> f1=sym('n1-1.');
```

```
>> f2=sym('.04687*mo - 1.*n1 + no');
```

```
>> f3=sym('.04471*mo - 1.*no');
```

```
>> s=solve(f1,f2,f3,no,mo,n1)
```

```
s = mo: [1x1 sym]
```

```
    n1: [1x1 sym]
```

```
    no: [1x1 sym]
```

```
>> s.n1
```

```
ans = 1.
```

```
>> s.no
```

```
ans = .48820703210307927495086263376283
```

```
>> s.mo
```

```
ans = 10.919414719371041712164227997379
```

```
% ПФ цифрового регулятора  $D(z)=10.9194*(z-0.8680)/(z+0.4882)$ 
```