

## Лекція 4

### Побудова дискретної математичної моделі об'єкта керування за відомою неперервною моделлю

#### Розділ 4.1. Математичні методи дослідження процесів в ЦСАК

Припускаємо, що всі прилади із складу ЦСАК (датчик первинної інформації, виконуючий пристрій, об'єкт управління, підсилювачі, фільтри електричних сигналів (неперервні та цифрові)) працюють поблизу номінальних (розрахункових) значень параметрів та режимів. Це дозволяє вважати їх математичні моделі лінійними та стаціонарними.

Для аналітичного дослідження процесів в ЦСАК із лінійними стаціонарними математичними моделями зручно застосовувати математичні методи дослідження, які базуються на використанні:

- дискретного перетворення Лапласа;
- Z - перетворення;
- W - перетворення (білінійне перетворення);
- перетворення із використанням поняття псевдочастоти.

Розглянемо таблиці оригіналів і зображень типових функцій, для яких обчислені неперервні перетворення Лапласа та Z – перетворення (див. табл..4.1).

В таблиці використані наступні позначення:

$f(t)$  - оригінал неперервної функції (утворююча неперервна функція);

$f(n) = f(t)|_{t=nT_0, n=0,1,2,3,\dots}$  - оригінал градчатої функції (утворююча градчата функція)

дорівнює значенням утворюючої неперервної функції в дискретні моменти часу;

$T_0$  - період дискретизації за часом;

$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$  - неперервне перетворення Лапласа (зображення за

Лапласом неперервної функції, де  $S$  - комплексна змінна;  $s = \sigma + j\omega$ ;  $j^2 = -1$ );

$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot e^{-snT_0} = D[f(n)]$  - дискретне перетворення Лапласа або зображення за

Лапласом градчатої функції;

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot z^{-n} = Z[f(n)] - Z - \text{перетворення градчатої функції або зображення}$$

градчатої функції за Z - перетворенням.

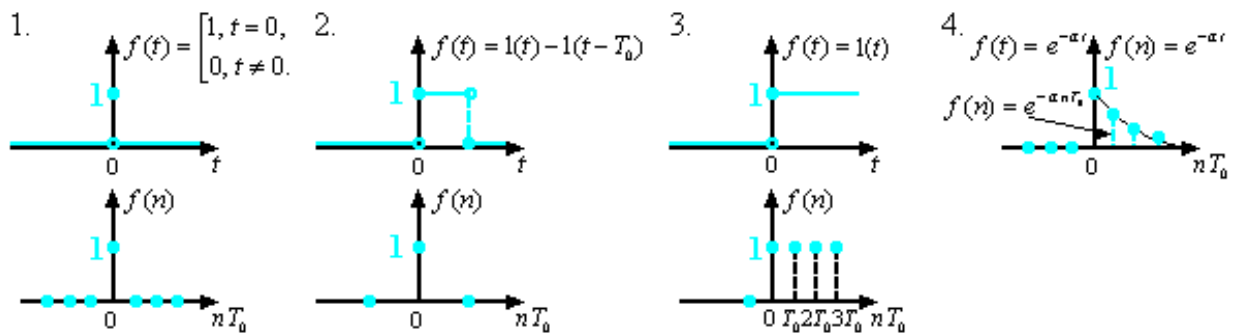
Дискретне перетворення Лапласа та Z - перетворення відрізняються тільки формою запису множника:  $z = e^{sT_0} = e^{\sigma T_0 + j\omega T_0} = e^{\sigma T_0} (\cos \omega T_0 + j \sin \omega T_0)$ .

**Таблиця 4.1**

**Зображення деяких неперервних та градчатих функцій**

Утворююча функція		Градчата функція, $f(n)$	Z - перетворення, $F(z)$
Оригінал, $f(t)$	Перетворення Лапласа, $F(s)$		
1) $f(t) = \begin{cases} 1, t = 0 \\ 0, t \neq 0 \end{cases}$	-	$\delta_0(n)$ - дискретна імпульсна функція	1
2) $1(t) - 1(t - T_0)$	$\frac{1 - e^{-sT_0}}{s}$	$1(n) - 1(n - 1)$	1
3) $1(t)$	$\frac{1}{s}$	$1(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$	$\frac{z}{z - 1}$
4) $e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$	$e^{-\alpha n T_0} = d^n$ $d = e^{-\alpha T_0}$	$\frac{z}{z - d}$
5) $t$	$\frac{1}{s^2}$	$n T_0$	$\frac{T_0 \cdot z}{(z - 1)^2}$
6) $\frac{t^2}{2!}$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{(n T_0)^2}{2!}$	$\frac{T_0 \cdot z \cdot (z + 1)}{2!(z - 1)^3}$
7) $1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{s(s + \alpha)}$	$1 - e^{-\alpha n T_0}$	$\frac{(1 - d) \cdot z}{(z - 1) \cdot (z - d)}$
8) $t \cdot e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s + \alpha)^2}$	$n T_0 \cdot e^{-\alpha n T_0}$	$\frac{T_0 \cdot z \cdot d}{(z - d)^2}$

В якості прикладу розглянемо алгоритм обчислення Z - перетворення для перших чотирьох градчатих функцій наведених в таблиці 4.1 (графіки неперервних оригіналів та градчатих функцій наведені на рис. 4.1):



**Рис. 4.1. Графічне зображення перших чотирьох неперервних оригіналів та градчатих функцій, що наведені у табл. 4.1**

$$1). F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n} = 1 \cdot z^{-0} + 0 \cdot z^{-1} + 0 \cdot z^{-2} + \dots = 1;$$

$$2). F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n} = 1 \cdot z^{-0} + 0 \cdot z^{-1} + 0 \cdot z^{-2} + \dots = 1;$$

$$3). F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n} = 1 \cdot z^{-0} + 1 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + \dots = 1 \cdot z^{-0} + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1};$$

$$4). F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\alpha T_0})^n z^{-n} = 1 + (d \cdot z^{-1})^1 + (d \cdot z^{-1})^2 + \dots = \frac{1}{1 - d \cdot z^{-1}} = \frac{z}{z - d} \Big|_{d=e^{-\alpha T_0}}$$

**Зауваження:**

- 1) при обчисленні Z – перетворення у прикладах 3 та 4 розглядалися нескінченні спадні геометричні прогресії із першим членом, який дорівнює 1, та знаменником (за модулем меншим одиниці), який відповідно дорівнює  $z^{-1}$  та  $d \cdot z^{-1}$ ;
- 2) для обчислення Z– перетворення для градчатих функцій більш складного вигляду, порівняно із наведеними у табл. 4.1, можливо застосовувати спеціальні правила, які сформульовані у вигляді теорем.

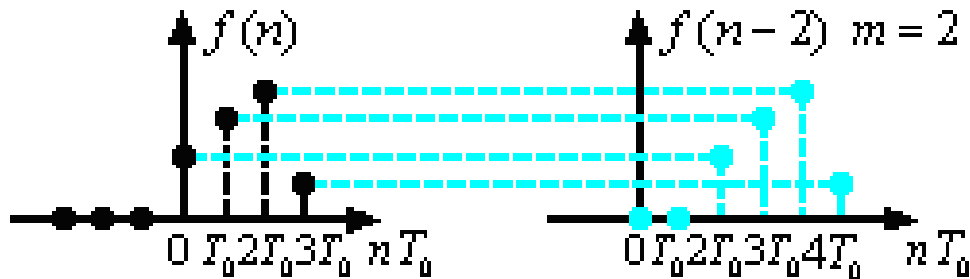
**Теорема Z – перетворення:**

1. Теорема про лінійність Z – перетворення:

$$F(z) = Z[a \cdot f_1(n) + b \cdot f_2(n)] = a \cdot Z[f_1(n)] + b \cdot Z[f_2(n)], \text{ де } a, b - \text{ сталі параметри;}$$

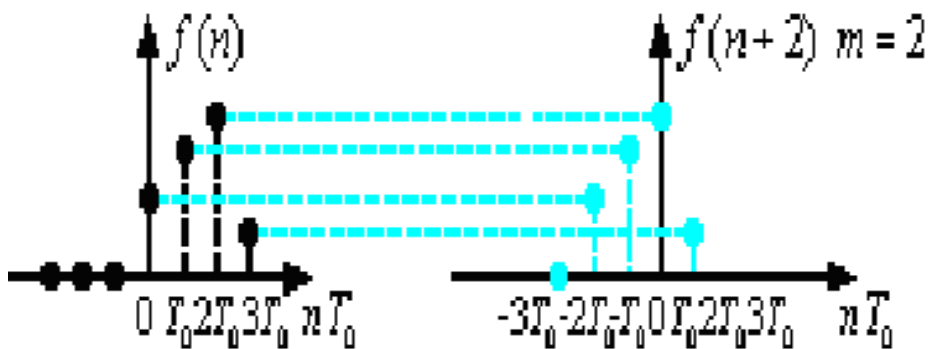
$$Z[f_i(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} f_i(n) \cdot z^{-n} - \text{ Z – перетворення функції } f_i(n) (i = 1, 2).$$

2. Теорема про зсув в часі вправо (при нульових початкових умовах):  $Z[f(n-m)] = z^{-m} \cdot F(z)$ , де  $F(z) = Z[f(n)]$ . Проілюструємо застосування даної теореми (див. рис. 4.2).



**Рис. 4.2** Графічна ілюстрація до теореми про зсув в часі вправо:  $f(n)$ -градчата та  $f(n-2)$  зсунута градчата функції

3. Теорема про зсув в часі вліво:  $Z[f(n+m)] = z^m \cdot (F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k) \cdot z^{-k})$ , де  $f(k), k = \overline{0, m-1}$  - початкові умови. При нульових початкових умовах ( $f(k) = 0, k = \overline{0, m-1}$ ):  $Z[f(n+m)] = z^m \cdot F(z)$ . Проілюструємо застосування даної теореми (див. рис. 4.3).

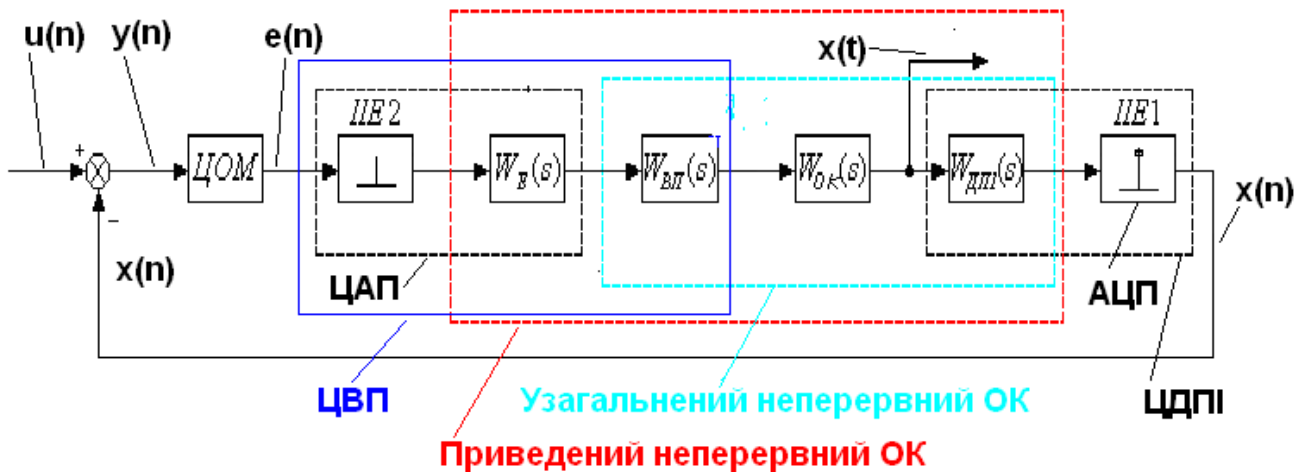


**Рис. 4.3** Графічна ілюстрація до теореми про зсув в часі вліво:  $f(n)$ -градчата та  $f(n+2)$  зсунута градчата функції

4. Теорема про зміну масштабу  $z$ :  $Z[f(n) \cdot e^{-\alpha n T_0}] = F(z \cdot e^{\alpha T_0})$ .
5. Теорема про початкове значення оригіналу:  $f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$ .
6. Теорема про кінцеве значення оригіналу:  $f(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{z \rightarrow 1} ((z-1) \cdot F(z))$ .

## Розділ 4.2. Структурні схеми математичних моделей одновимірних ЦСАК

Використовуючи математичні моделі дії АЦП та ЦАП, які були розглянуті у лекціях 2 та 3, побудуємо математичну модель окремого каналу ЦСАК (див. рис. 4.4).



**Рис. 4.4. Структурна схема математичної моделі окремого каналу ЦСАК із розгорнутою математичною моделлю неперервної частини**

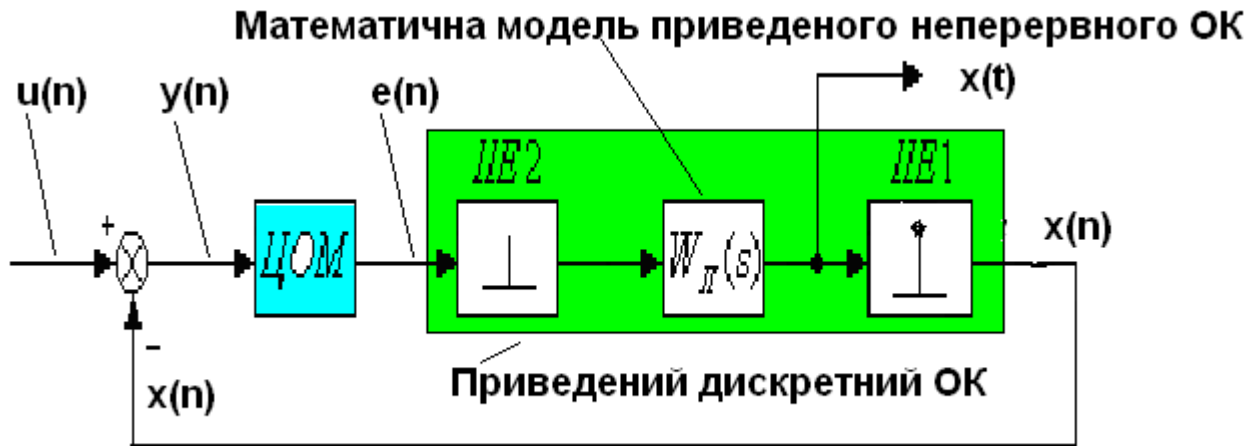
Використовуючи математичні моделі, що представлені у формі неперервних передавальних функцій, неперервної частини виконуючого пристрою (ВП), об'єкта керування (ОК), неперервної частини датчика первинної інформації (ДПІ) можемо обчислити передавальну функцію узагальненого неперервного ОК (УНОК):  $W_H(s) = W_{ВП}(s) \cdot W_{ОК}(s) \cdot W_{ДПІ}(s)$ . Якщо до складу узагальненого неперервного ОК включити екстраполятор, математична модель якого представлена у вигляді неперервної передавальної функції  $W_E(s)$ , то отримаємо, так званий, приведений неперервний ОК (ПНОК). Передавальна функція приведенного неперервного ОК матиме вигляд  $W_{П}(s) = W_H(s) \cdot W_E(s)$ . Як бачимо, передавальна функція  $W_{П}(s)$  відрізняється від передавальної функції  $W_H(s)$  множителем  $W_E(s)$ , який є передавальною функцією екстраполятора.

Обчислюємо передавальну функцію для екстраполятора нульового порядку:

$$W_{E_0}(s) = L \left[ \int_{t-T_0}^t \delta(\tau) d\tau \right] = L \left[ \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{t-T_0} \delta(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-sT_0} = \frac{1 - e^{-sT_0}}{s}, \text{ де } L[.] \text{ —}$$

оператор перетворення Лапласа.

Використовуючи математичну модель приведеного неперервного ОК у вигляді його передавальної функції  $W_{II}(s)$ , представимо математичну модель окремого каналу ЦСАК у більш компактній формі (див. рис. 4.5).



*Рис. 4.5. Структурна схема математичної моделі окремого каналу ЦСАК, що побудована із використанням математичної моделі приведеного неперервного об'єкта керування*

### 4.3. Передавальна функція приведеного дискретного об'єкта керування (ПДОК)

Визначимо дискретну передавальну функцію або Z - передавальну функцію ПДОК, як відношення Z - перетворення вихідного сигналу ОК до Z - перетворення вхідного сигналу ОК при нульових початкових умовах:

$$W_{ПД}(z) = \frac{X(z)}{E(z)},$$

де  $X(z) = Z[x(n)]$ ,  $E(z) = Z[e(n)]$ .

Тоді, якщо відома неперервна передавальна функція ПНОК  $W_{II}(s)$ , можна обчислити Z - передавальну функцію ПДОК як Z – перетворення від

$$L^{-1}[W_{II}(s)] \Big|_{t=nT_0, n=0,1,2,\dots} = L^{-1}[W_H(s) \cdot W_E(s)] \Big|_{t=nT_0, n=0,1,2,\dots},$$

де  $L^{-1}[\cdot]$  - символ операції обчислення зворотного перетворення Лапласа.

Остаточно можемо записати

$$W_{ПД}(z) = \frac{X(z)}{E(z)} = Z[W_{II}(s)] = Z \left[ L^{-1}[W_{II}(s)] \Big|_{t=nT_0, n=0,1,2,\dots} \right] = Z \left[ L^{-1}[W_H(s) \cdot W_E(s)] \Big|_{t=nT_0, n=0,1,2,\dots} \right].$$

**Зауваження:**  $Z$  - перетворення від добутку неперервних передавальних функцій не дорівнює добутку  $Z$  - перетворень, що обчислені для окремих множників.

Розглянемо приклад обчислення  $Z$  - перетворення градчатої функції, яка задана у вигляді

$$f(n) = f(t) \Big|_{t=nT_0, n=0,1,2,3,\dots} = L^{-1}[W(s)] \Big|_{t=nT_0, n=0,1,2,\dots},$$

$$\text{де } W(s) = \frac{k}{Ts+1}.$$

Обчислення виконаємо із використанням рядка 4) табл. 4.1:

$$Z[W(s)] = Z\left[\frac{k}{Ts+1}\right] = Z\left[L^{-1}\left[\frac{k}{Ts+1}\right] \Big|_{t=nT_0}\right] = \frac{k}{T} Z\left[L^{-1}\left[\frac{1}{s+\alpha}\right] \Big|_{t=nT_0}\right] = \frac{k}{T} \cdot \frac{z}{z-d}, \alpha = \frac{1}{T}, d = e^{-\alpha T_0}.$$

Обчислимо передавальну функцію ПДОУ, якщо задана передавальна функція УНОК  $W_H(s)$ , а в ЦАП використовується реальний імпульсний елемент із екстраполятором нульового порядку  $E_0$ :

$$\begin{aligned} W_{\text{ПД}}(z) &= Z[W_{E_0}(s) \cdot W_H(s)] = Z\left[\frac{1-e^{-sT_0}}{s} \cdot W_H(s)\right] = Z\left[\frac{W_H(s)}{s} - \frac{W_H(s)}{s} \cdot e^{-sT_0}\right] = Z\left[\frac{W_H(s)}{s}\right] - \\ &- Z\left[\frac{W_H(s)}{s} \cdot e^{-sT_0}\right] = Z\left[L^{-1}\left[\frac{W_H(s)}{s}\right]\right] - Z\left[L^{-1}\left[\frac{W_H(s)}{s} \cdot e^{-sT_0}\right]\right] = Z\left[f(t) \Big|_{t=nT_0, n=0,1,2,\dots}\right] - \\ &- Z\left[f(t-T_0) \Big|_{t=nT_0, n=0,1,2,\dots}\right] = Z\left[f(t) \Big|_{t=nT_0, n=0,1,2,\dots}\right] - z^{-1} \cdot Z\left[f(t) \Big|_{t=nT_0, n=0,1,2,\dots}\right] = F(z) - z^{-1} \cdot F(z) = \\ &= (1-z^{-1}) \cdot F(z) = \frac{z-1}{z} \cdot F(z) = \frac{z-1}{z} \cdot Z\left[\frac{W_H(s)}{s}\right], \quad F(z) = Z\left[f(t) \Big|_{t=nT_0, n=0,1,2,\dots}\right] = Z[f(n)]. \end{aligned}$$

Остаточно правило пошуку передавальної функції ПДОУ, якщо в ЦАП використовується реальний імпульсний елемент із екстраполятором нульового порядку, має вигляд наступного математичного виразу:  $W_{\text{ПД}}(z) = \frac{z-1}{z} \cdot Z\left[\frac{W_H(s)}{s}\right]$ .

Припустимо, що  $W_H(s) = \frac{k}{Ts+1}$ . Тоді, із використанням рядка 7) табл. 4.1,

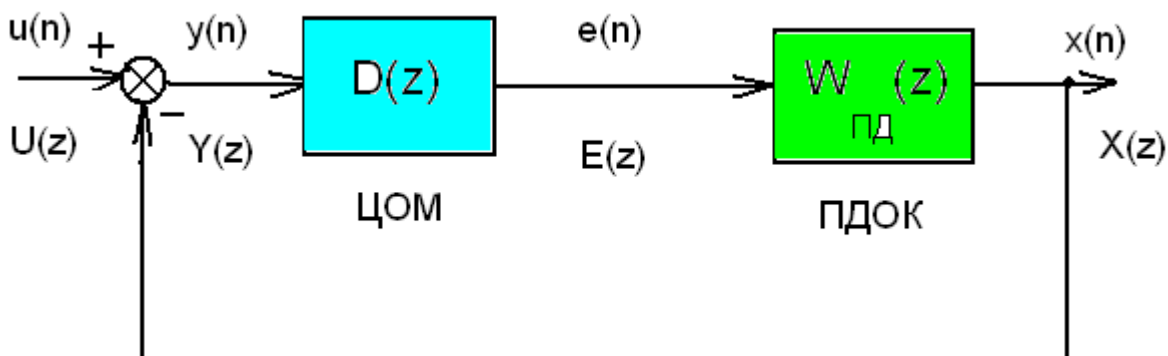
отримаємо:

$$W_{\text{ПД}}(z) = \frac{z-1}{z} \cdot Z\left[\frac{k}{s \cdot (Ts+1)}\right] = \frac{z-1}{z} \cdot k \cdot Z\left[\frac{\alpha}{s \cdot (s+\alpha)} \Big|_{\alpha=\frac{1}{T}}\right] = \frac{z-1}{z} \cdot k \cdot \frac{(1-d) \cdot z}{(z-1) \cdot (z-d)} = \frac{k \cdot (1-d)}{(z-d)} \Big|_{d=e^{-\alpha T_0}, \alpha=\frac{1}{T}}.$$

**Зауваження.** Якщо під знаком  $Z$  - перетворення розташовано вираз, який не співпадає із жодним із виразів, що надаються у довідкових таблицях  $Z$  -

перетворення, то необхідно виконати розклад цього виразу на прості дроби і, після цього, скористатись довідником.

Припустимо, що відома передавальна функція ЦОМ  $D(z)$  та передавальна функція ПДОУ  $W_{\text{ПД}}(z)$ . Тоді структурна схема математичної моделі окремого каналу ЦСАК набуває вигляду (див. рис. 4.6):



**Рис.4.6. Структурна схема математичної моделі окремого каналу ЦСАК, побудована із використанням  $Z$  – передавальних функцій ЦОМ та ПДОК:**

$$U(z) = Z[u(n)]; Y(z) = Z[y(n)]; E(z) = Z[e(n)]; X(z) = Z[x(n)]$$

Знайдемо передавальну функцію замкненої цифрової системи автоматичного керування, зображеної на рис.4.6. Для цього використаємо ті ж самі прийоми, які використовуються для пошуку передавальної функції замкненої неперервної системи автоматичного керування.

Передавальна функція замкненої одноканальної ЦСАК за вихідним сигналом набуває вигляду:  $H_x(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{D(z) \cdot W_{\text{ПД}}(z)}{1 + D(z) \cdot W_{\text{ПД}}(z)} = \frac{W_p(z)}{1 + W_p(z)}$ , де  $W_p(z)$  – передавальна функція розімкненої системи:  $W_p(z) = D(z) \cdot W_{\text{ПД}}(z)$ .

Передавальна функція замкненої одноканальної ЦСАК за помилкою:

$$H_y(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{1 + D(z) \cdot W_{\text{ПД}}(z)} = \frac{1}{1 + W_p(z)}$$

В ЦСАК може виникати запізнення, яке пов'язане з наступними фізичними явищами:

1. Транспортне запізнення, яке викликане фізичними процесами передачі інформації та енергії у довгих лініях (електричних, пневматичних, гідравлічних, оптоволоконних, електромагнітних). Позначимо це запізнення  $\tau_{Трансп}$ .

2. Обчислювальне запізнення, яке виникає в тому випадку, коли інтервал часу, що відведено на розрахунки в ЦОМ перевищує період дискретизації:  $\tau_{ОБЧ} > T_0$ .

Припустимо, що сумарне запізнення:  $\tau_{\Sigma} = \tau_{Трансп} + \tau_{ОБЧ} = kT_0$ , де  $k$  – ціле додатне число. Тоді  $\tau_{\Sigma}$  може бути враховане в передавальній функції приведенного неперервного ОК у вигляді  $W_{II}(s) \cdot e^{-\tau_{\Sigma}s}$  і далі в передавальній функції ПДОК:  $Z[W_{II}(s) \cdot e^{-\tau_{\Sigma}s}] = z^{-k}W_{ИД}(z)$ .

### Висновок

**Передавальна функція  $Z[W_{II}(s) \cdot e^{-\tau_{\Sigma}s}] = z^{-k}W_{ИД}(z)$  приведенного дискретного об'єкту керування (ПДОК), яка може бути визначена із використанням  $Z$  – перетворення, являє собою дискретну математичну модель об'єкта керування, що и треба було отримати.**