

Лекція 3. Квантування за часом

Розділ 3.1. Модель дії імпульсного елемента

Розглянемо модель дії імпульсного елемента (ІЕ) із складу АЦП. Цей ІЕ модулює вихідну послідовність імпульсів $x(n)$ вхідним сигналом $x(t)$. Таким чином виконується заміна неперервної в часі функції сукупністю виділених ординат або дискрет вхідної функції. На виході ІЕ отримуємо так звану градчату функцію $x(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ (див. рис. 3.1).

Імпульсний елемент, на виході якого виникає градчата функція, називається ідеальним імпульсним елементом 1-го роду (ІЕ1).

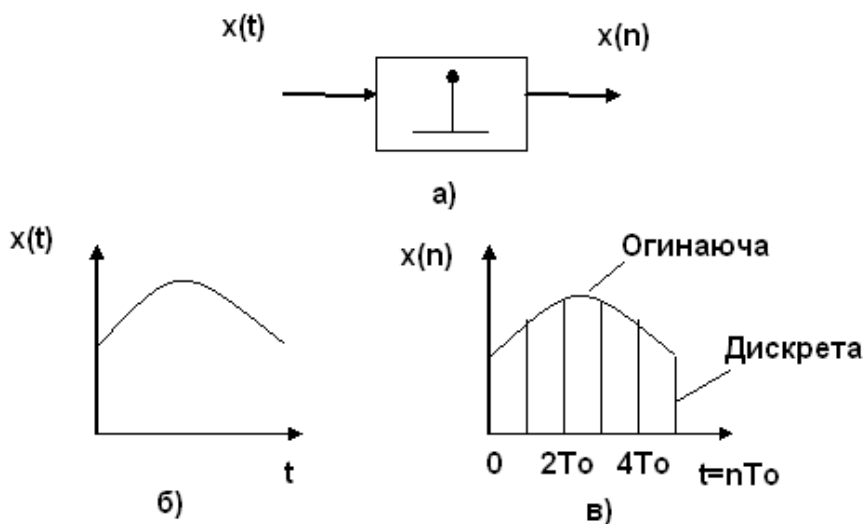
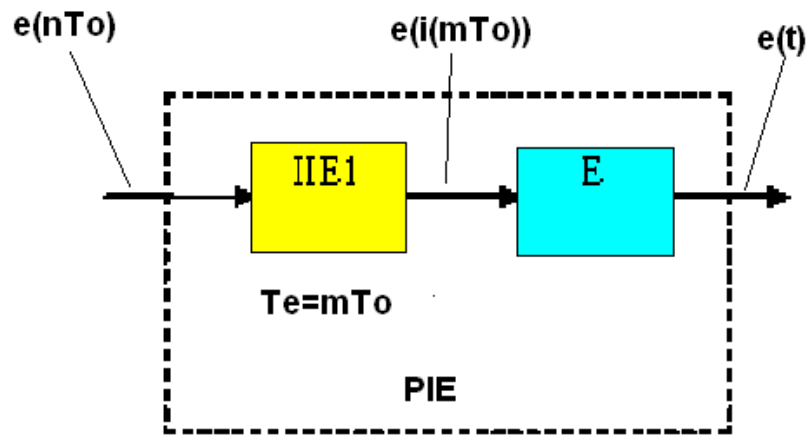


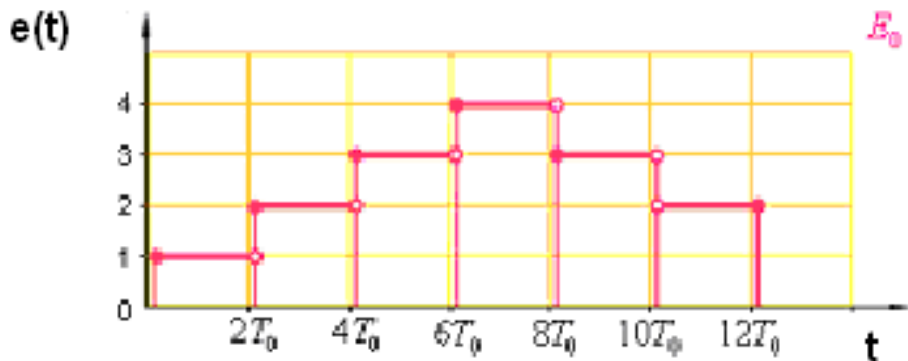
Рис. 3.1. Умовне позначення ідеальним імпульсним елементом 1-го роду (а) та графічні образи сигналів на його вході (б) та виході (в)

Градчата функція із виходу ІЕ1 надходить на обробку у ЦОМ, з виходу якої управляючий сигнал $e(n)$ подається на ІЕ1 ЦАП.

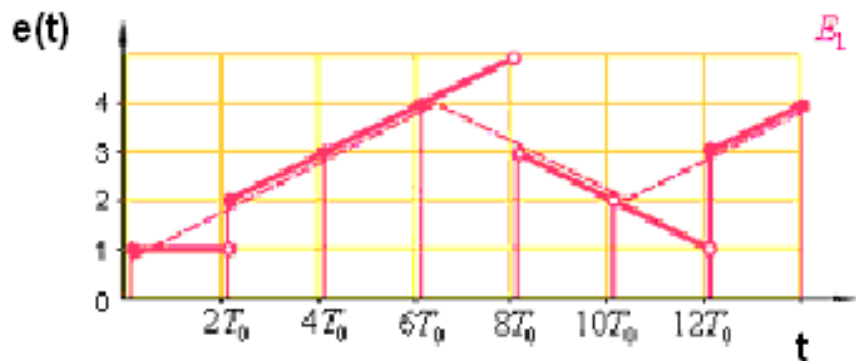
ІЕ1, що входить до складу, ЦАП розглядається у взаємодії з екстраполятором (Е). ІЕ1 разом із екстраполятором утворюють так званий реальний імпульсний елемент (РІЕ). Розглянемо модель дії РІЕ (див. рис. 3.2, а), б), в)).



а) структурна схема реального імпульсного елемента; $i=1,2,3,\dots$;
 m – кратність проріджування



б) графічний образ вихідного сигналу реального імпульсного елемента
із екстраполятором нульового порядку при $m=2$;



в) графічний образ вихідного сигналу реального імпульсного елемента
із поліноміальним екстраполятором першого порядку при $m=2$;

Рис. 3.2. Модель дії реального імпульсного елемента із складу ЦАП

Поліноміальний екстраполятор виконує прогнозування зміни у неперервному часі в інтервалі $(iT_e; (i+1)T_e)$, $i=1,2,3,\dots$; свого вхідного сигналу $e(i \cdot T_e)$ за виразом $e(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \dots + a_k \cdot t^k$, де k – ціле невід'ємне число. Якщо $k=0$, то має місце екстраполяція нульового порядку (екстраполятор позначаємо E_0). Якщо $k=1$, то має місце екстраполяція першого порядку (екстраполятор позначаємо E_1) і. т.д. Підкреслимо, що у системі комп'ютерної математики MATLAB+Simulink у бібліотеці Simulink (Discrete) існують блоки Zero-Order Hold та First-Order Hold, що моделюють дію відповідно E_0 та E_1 . Зауважимо, що блок Zero-Order Hold можливо використовувати також для моделювання дії імпульсного елемента, як у складі АЦП, так і у складі ЦАП.

Якщо екстраполятор із складу ПЕ генерує імпульси спеціальної форми, а їх амплітуда пропорційна кожній дискреті на виході ПЕ1, то має місце амплітудно імпульсна екстраполяція. Можливо використовувати також інші види екстраполяції: фазо-, широтно- або частотно- імпульсну екстраполяцію, коли в залежності від амплітуди дискети, змінюються відповідно лише фаза, або тривалість імпульсу спеціальної форми, або частота імпульсів заданої форми в інтервалі $(iT_e; (i+1)T_e)$, $i=1,2,3,\dots$.

Прямою задачею, яку вирішує ПЕ1 із складу АЦП є перетворення неперервного сигналу на його вході в градчасту функцію на його виході. Прямою задачею ПЕ1 із складу ЦАП є перетворення градчастої функції на його вході в градчасту функцію на його виході, за звичай, із збільшенням кроку квантування за часом. При цифровій обробці інформації (ЦОІ) розглядають також зворотну задачу, а саме, встановлення неперервного вхідного сигналу ПЕ1 АЦП за відомою градчастою функцією на його виході (інтерполяційна задача). При цифровому керуванні розглядають екстраполяційну задачу в розумінні прогнозування вихідного сигналу екстраполятора на майбутній інтервал часу: $t \in [t; t + T_e]$, $t = iT_e$, $i = 0, 1, 2, \dots$ за відомими значеннями градчастої функції в попередні моменти часу (див. рис. 3.3).

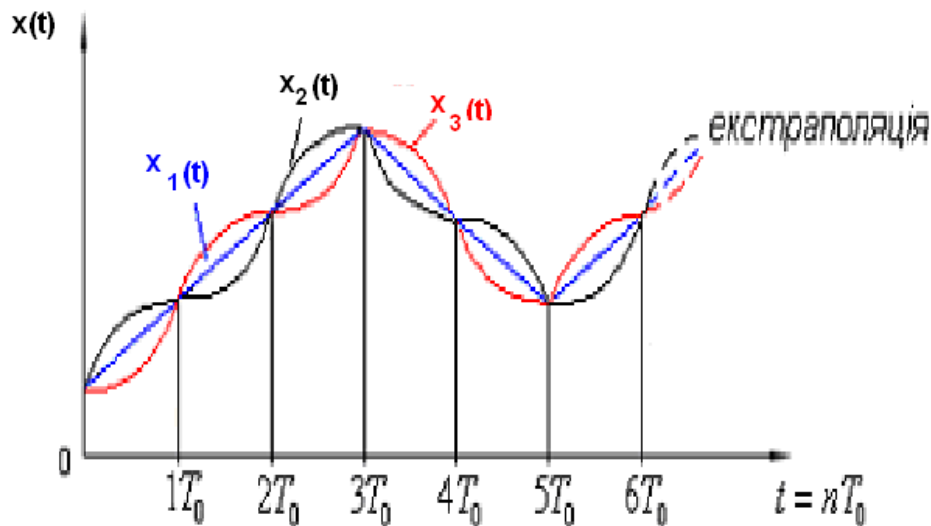


Рис. 3.3. Графічна ілюстрація щодо розв'язання задачі відновлення вхідного сигналу ПЕІ та його екстраполяція за відомими дискетами на прикладі випадку, коли $T_e = T_0$: суцільною лінією надано декілька варіантів розв'язання інтерполяційної задачі, а пунктиром - екстраполяційної задачі.

Неперервні функції $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ і т.д., значення яких співпадають із заданими дискетами називають огинаючими градчатої функції (рис.3.3). Як бачимо, інтерполяційна та екстраполяційна задачі мають безліч розв'язків, тому що можливо провести безліч огинаючих градчатої функції крізь дискретно задані точки.

Для однозначного вирішення вище означених задач потрібна додаткова інформація про неперервний сигнал, для якого вважається відомою градчата функція.

Розглянемо математичне обґрунтування однозначного і абсолютно точного розв'язання інтерполяційної та екстраполяційної задач.

Розділ 3.2. Умови не спотворення інформації при квантуванні за часом

Для з'ясування умов не спотворення інформації при квантуванні за часом представимо градчату функцію, як результат інтегрування неперервної функцію вигляду $X^*(t) = x(t) \cdot \delta^*(t)$, яку подано на вхід інтегруючого ланцюга 1 (див. рис.

3.4). Інтегратори 1, 2, 3 виконують математичні дії відповідно до наведених нижче

формул: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t-\varepsilon}^t X^*(\tau) d\tau$, $\int_{t-\varepsilon}^t X^*(\tau) d\tau$, $\int_{t-T_0}^t X^*(\tau) d\tau$.

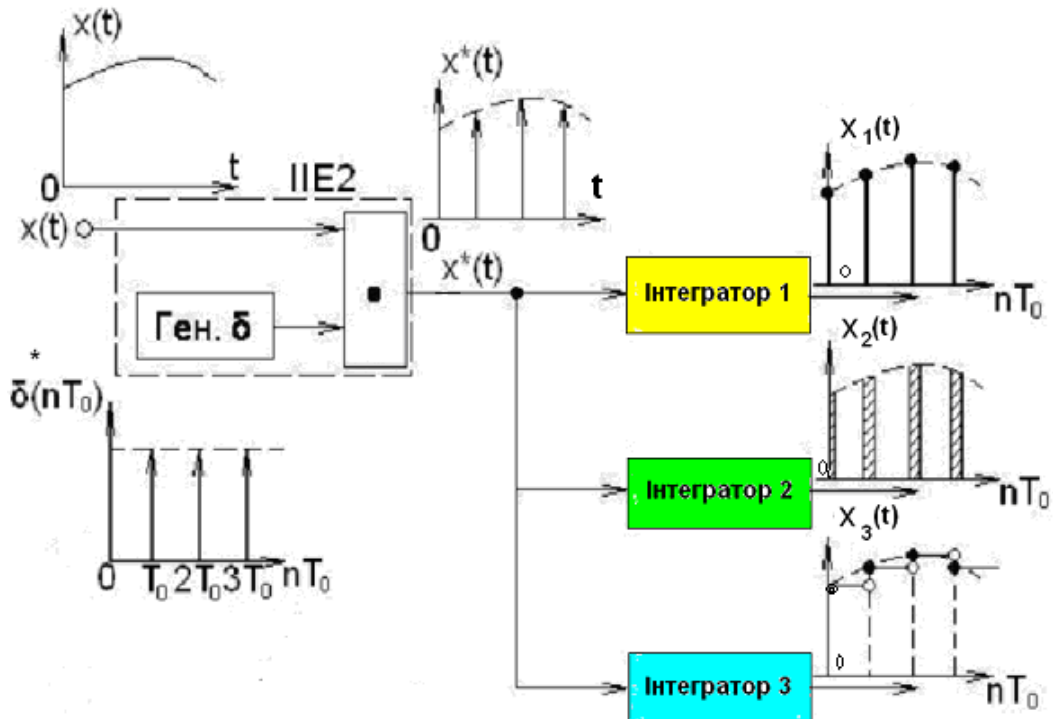


Рис. 3.4. Структурна схема алгоритму побудови градчастої функції (на виході інтегратора 1), послідовності прямокутних імпульсів тривалістю $\varepsilon < T_0$ (на виході інтегратора 2) та тривалістю T_0 (на виході інтегратора 3) із амплітудою, що дорівнює значенню $x(t)$ в момент часу $t = m \cdot T_0$: Ген. δ - генератор послідовності дельта-функцій, яку позначено $\delta^*(nT_0)$

Функція $X^*(t)$ виникає на виході так званого простішого імпульсного елемента (ПІЕ) або, як ще кажуть, ідеального імпульсного елемента другого роду (ІІЕ2), схематичне позначення якого наведено на рис. 3.5.

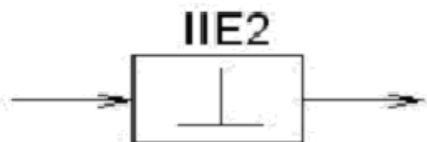


Рис. 3.5. Схематичне позначення ідеального імпульсного елемента другого роду

У відповідності із схемою дії (рис. 3.4) простішим імпульсним елементом або ідеальним імпульсним елементом другого роду називають такий

імпульсний елемент, на виході якого діє послідовність δ -функцій модульована вхідним сигналом, тобто $X^*(t)$.

У виразі для обчислення $X^*(t)$ використана функція: $\delta^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)$,

де $\delta(t - nT_0)$ - дельта-функція (δ -функція).

Дельта-функцію можна представити як результат обчислення похідної від сходиноквої функції

$$1(t - nT_0) = \begin{cases} 1 & \text{при } t - nT_0 \geq 0, \\ 0 & \text{при } t - nT_0 < 0 \end{cases}, \text{ тобто}$$

$$1(t - nT_0) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau - nT_0) d\tau \text{ або } \delta(t - nT_0) = \frac{d1(t - nT_0)}{dt} \quad (\text{див. рис. 3.6}).$$

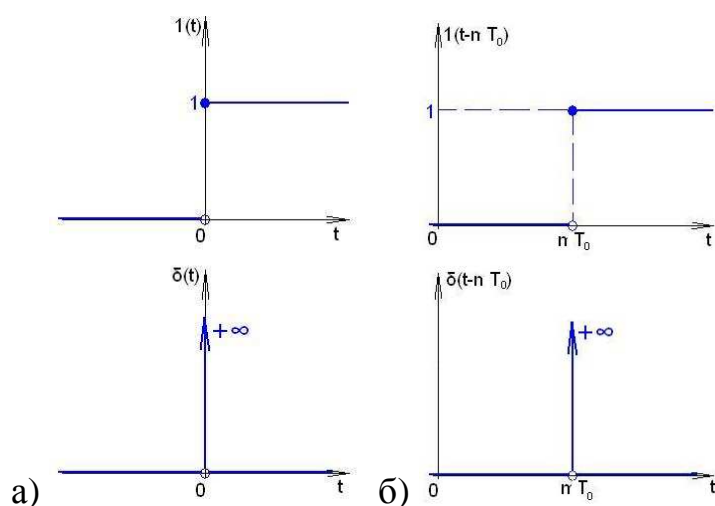


Рис. 3.6. Графічна ілюстрація стосовно зображення сходиноквої та дельта функції для випадків, коли $n = 0$ (а) та $n \neq 0$ (б)

Дельта-функція та сходиноква функція належать до класу так званих узагальнених функцій, які є неперервними в часі функціями. В якості прикладу розглянемо сигма дельта-функцію (δ_σ - функцію) (див. рис. 3.7)

$$\delta_\sigma(t) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-nT_0)^2}{2 \cdot \sigma^2}}.$$

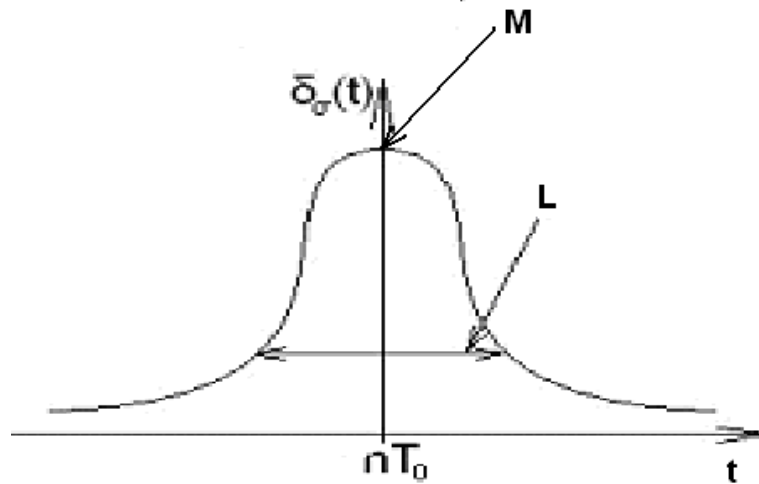


Рис. 3.7. Графічний образ сигма дельта-функції:

$$\text{якщо } L = 2 \cdot \sigma \rightarrow 0, M = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \rightarrow \infty$$

З’ясуємо спектральні (частотні) властивості простішого імпульсного елемента. Періодична функція $\delta^*(t)$ являє собою послідовність δ_σ - функцій (див. рис. 3.4) і може бути представлена за допомогою ряду Фур’є:

$$\delta^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t} = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\omega_0 t}, c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta^*(\tau) e^{-in\omega_0 \tau} d\tau = \frac{1}{T_0}, \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}, i^2 = -1.$$

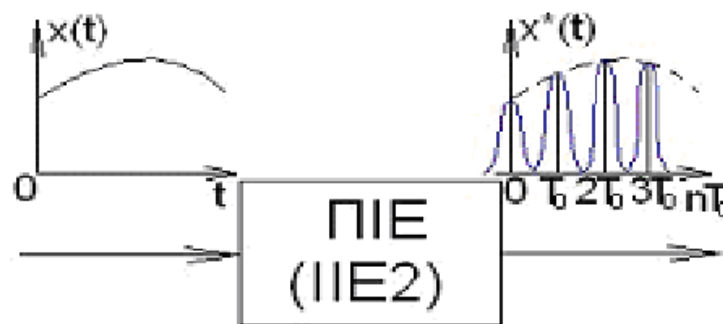


Рис. 3.8. Графічний образ сигналу $X^*(t)$ на виході ідеального імпульсного елемента другого роду

Тоді

$$X^*(t) = x(t)\delta^*(t) = x(t) \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\omega_0 t}.$$

Знайдемо перетворення Лапласа для $X^*(t)$ (див. рис. 3.8):

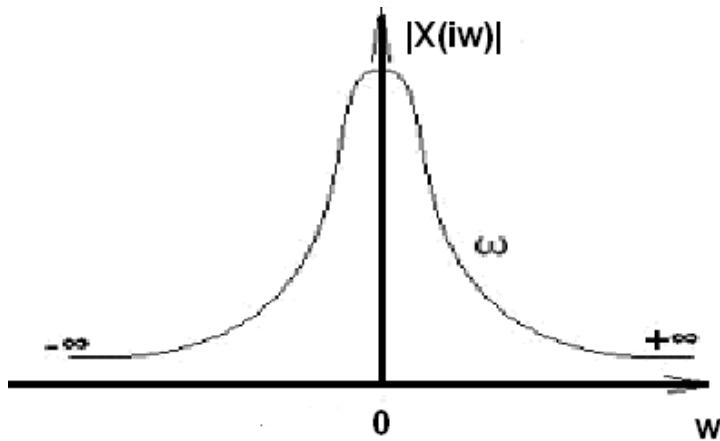
$$X^*(s) = L[X^*(t)] = \int_0^{\infty} X^*(t) e^{-st} dt = \frac{1}{T_0} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X(s - im\omega_0).$$

Використовуючи отриманий вираз, з'ясуємо спектральні властивості $X^*(s)$.

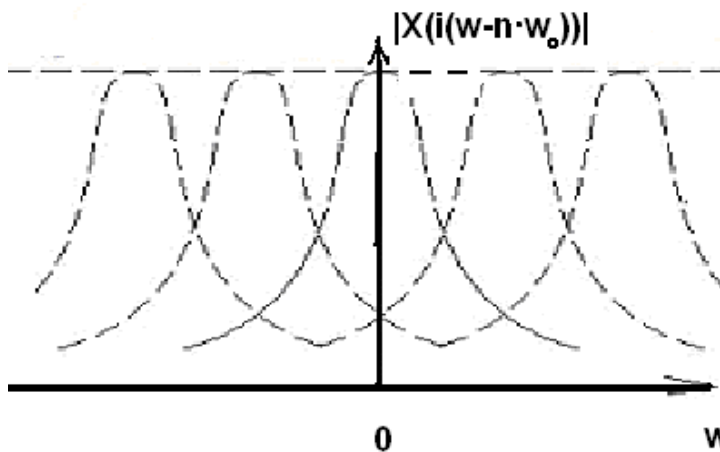
Для цього покладемо $s=i\omega$ і отримуємо вираз

$$X^*(i\omega) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(i(\omega - n\omega_0)).$$

Із отриманого виразу випливає, що для обчислення спектральної характеристики вихідного сигналу ПЕ2 необхідно виконати додавання зсунутих спектрів його вхідного сигналу (див. рис. 3.9).



а) спектр вхідного сигналу ПЕ2



б) зсунуті спектри вхідного сигналу ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

Рис. 3.9. Спектральні характеристики та зсунуті спектральні характеристики вхідного сигналу ПЕ2

В результаті отримаємо спектр вихідного сигналу ПЕ2, який буде періодичною за частотою функцією з найменшим додатнім періодом, що дорівнює частоті квантування $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$.

З'ясуємо умови, які дозволяють виконати обробку вихідного сигналу ПЕ2 і отримати після обробки сигнал із спектром, що повністю співпадає із спектром його вхідного сигналу. За фізичним змістом це означає: знайти умови, при яких неперервну функцію можна замінити на градчасту і потім знову абсолютно точно відновити неперервну функцію за відомою градчастою (будемо називати ці умови – умови не спотворення інформації при квантуванні за часом).

Умови не спотворення інформації при квантуванні за часом

1. **Перша умова не спотворення інформації.** Спектр вхідного сигналу ПЕ2 (див. рис. 3.10, 1)) повинен бути обмежений (фінітність спектру вхідного сигналу). Верхня гранична частота ω_B повинна бути відомою.

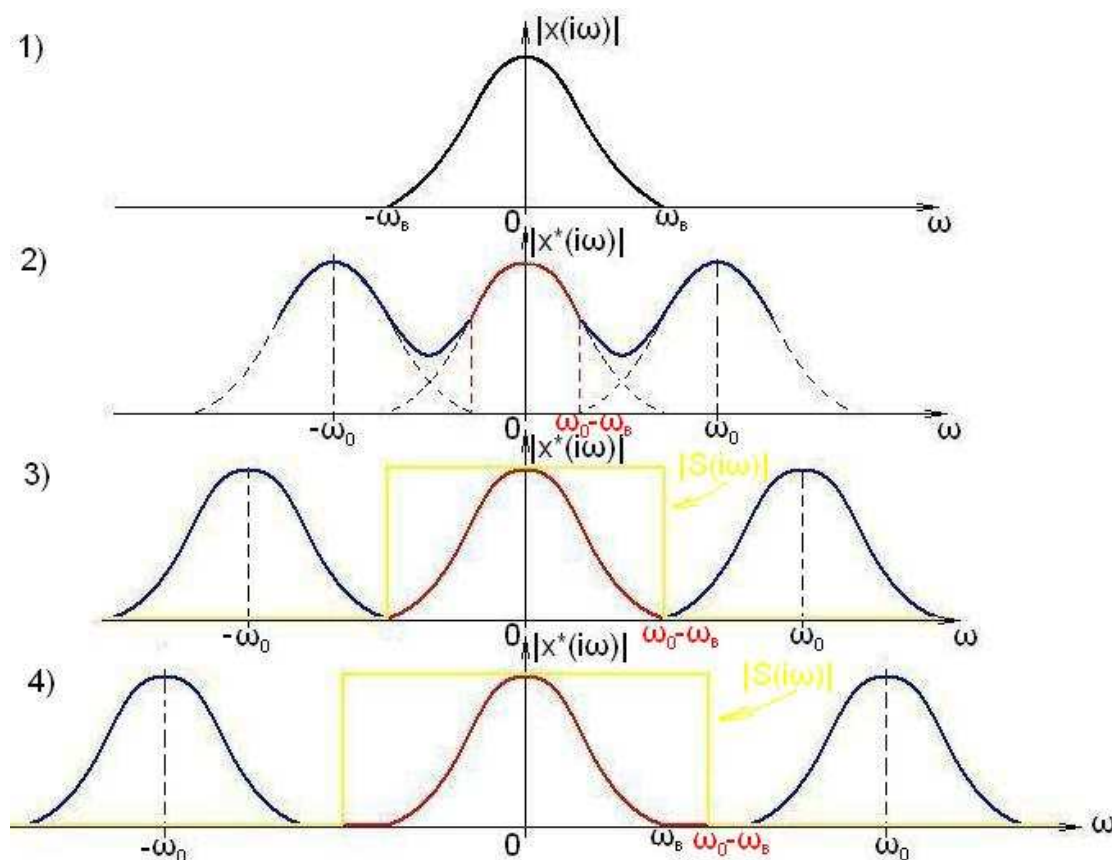


Рис. 3.10. Графічна ілюстрація стосовно обґрунтування умов не спотворення інформації при квантуванні за часом

Якщо $\omega_B > \omega_0 - \omega_B$, тобто $\omega_0 < 2\omega_B$, то уникнути спотворення спектру вхідного сигналу ПЕ2 можливо лише на відрізку $\omega \in [-(\omega_0 - \omega_B); (\omega_0 - \omega_B)]$.

Якщо $\omega_0 - \omega_B \geq \omega_B$, $\omega_0 \geq 2\omega_B$, то зона неспотворення вхідного сигналу ПЕ2 збільшується і перевищує відрізок $[-\omega_B; \omega_B]$, але на інтервалах спектру $(-\infty; -(\omega_0 - \omega_B)) \cup ((\omega_0 - \omega_B); +\infty)$, спотворення зберігається. Тому для забезпечення повного співпадання спектрів вхідного та вихідного сигналів ПЕ2, необхідно поставити на виході ПЕ2 ідеальний полосовий фільтр, який пропускає сигнал лише у діапазоні частот $[-\omega_B; \omega_B]$.

2. Друга умова не спотворення інформації. Частота квантування за часом обирається, виходячи із співвідношення, із якого випливає обмеження на T_0 :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \geq 2\omega_B \Rightarrow T_0 \leq \frac{\pi}{\omega_B}.$$

Ця умова у науковій літературі отримала назву “Теорема Котельникова” або “Теорема Шеннона”.

Друга умова складає зміст, так званої, теореми квантування і лежить в основі імпульсних способів передачі і перетворення інформації. Ця умова обґрунтовує можливість заміни неперервного сигналу градчатою функцією без загублення інформації.

3. Третя умова не спотворення інформації. Третьою умовою є наявність у виході ПЕ2 неперервного полосового фільтру з ідеальною характеристикою (ідеального полосового фільтру (ІПФ)):

$$|S(i\omega)| = \begin{cases} k_\phi \forall \omega \in [-\omega_B; \omega_B] \\ 0 \forall \omega \in R \setminus [-\omega_B; \omega_B] \end{cases}$$

Визначимо процес на виході ідеального полосового фільтру:

$$X_{нф}(i\omega) = K_\phi X^*(i\omega),$$

де $\omega \in [-\omega_B; \omega_B]$, $T_0 \leq \frac{\pi}{\omega_B}$.

Скориставшись формулою зворотнього перетворення Фур'є, отримаємо на виході ідеального полосового фільтру сигнал, який повністю співпадає із вхідним сигналом ПЕ2 (див. рис. 3.11):

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_{нф}(i\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_0) \frac{\sin(\omega_B(t - nT_0))}{\omega_B(t - nT_0)},$$

де $K_{\phi} = \frac{\pi}{\omega_B}$.

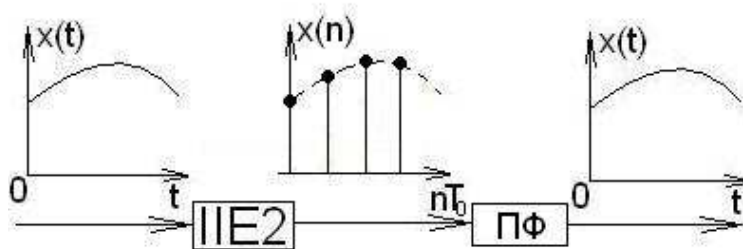


Рис 3.11. Схема відновлення вхідного неперервного за часом сигналу ПЕ2 за відомою градчастою функцією без загублення інформації при виконанні 3-х умов

Загальний висновок

1. Неправильний вибір кроку квантування за часом T_0 для АЦП може призвести до редукції (трансформування) високочастотних збурень у низько частотну область спектру і підвищення, тим самим, впливу цих збурень на ефективність роботи цифрової системи автоматичного керування.

2. Для уникнення впливу високочастотних збурень на ефективність роботи цифрової системи автоматичного керування необхідно:

або на вході АЦП поставити фільтр низьких частот (ФНЧ - не пропускає високочастотні збурення) та обирати крок квантування за часом T_0 для АЦП за виразом $T_0 \leq \frac{\pi}{\omega_{в,ФНЧ}}$, де $\omega_{в,ФНЧ}$ - верхня гранична частота ФНЧ;

або, у разі відсутності фільтру низьких частот на вході АЦП, обирати крок квантування за часом T_0 для АЦП за виразом $T_0 \leq \frac{\pi}{\max\{\omega_{в,кс}; \omega_{в,зб}\}}$,

де $\omega_{в,кс}$; $\omega_{в,зб}$ - відповідно верхні граничні частоти корисного сигналу та будь якого збурення.