Лекція 10. Деякі окремі випадки транспортних задач

10.1. Транспортні задачі із неправильним балансом

10.1.1. Транспортна задача із надмірністю запасів

Досі розглядались транспортні задачі із виконанням умови: сума запасів дорівнює сумі заявок

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j . \tag{10.1}$$

Ця класична транспортна задача має назву *транспортної задачі з правильним балансом*. Порушення умови правильного балансу перетворює класичну транспортну задачу в *транспортну задачу із неправильним балансом*. Порушення балансу поділяють на 2 типи:

1. Сума запасів у пунктах відправлення перевищує суму заявок

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j , \tag{10.2}$$

тобто має місце *транспортна задача із надмірністю запасів*.

2. Сума заявок перевищує наявні запаси

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{10.3}$$

тобто маємо *транспортну задачу із надмірністю заявок*.

У випадку надмірності запасу, постановка транспортної задачі набуває вигляду: знайти такий план перевезень $\left(x_{ij}\right)$, при якому усі заявки будуть виконані, а загальна вартість перевезень набуває мінімального значення:

$$W = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min_{x_{ij} \ge 0 \left(i=\overline{1,m}\;\; j=\overline{1,n}\right)} \tag{10.4}$$

при виконанні системи обмежень

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} < a_i \; \left(i = \overline{1, m_1}\right), \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \; \left(i = \overline{m_1 + 1, m}\right), \\ \sum\limits_{j=1}^{m} x_{ij} = b_j \; \left(j = \overline{1, n}\right), \end{cases} \tag{10.5}$$

та умов (10.2).

Як бачимо, частина або всі рівняння-обмеження перетворюються в нерівності-обмеження. Розв'язок цієї транспортної задачі можливо отримати або класичним симплекс-методом або за допомогою методів розв'язання транспортних задач, розглянутих вище (розподільчий метод, метод потенціалів).

Перед тим, як скористатись відомими методами розв'язання транспортної задачі,зведемо транспортну задачу із надмірністю запасів, до класичної транспортної задачі із правильним балансом.

Для цього використаємо уявний пункт призначення (фіктивний, хибний) $B_\text{ф}$, якому належить заявка, що якраз дорівнює перевищенню запасів над заявками:

$$b_\text{ф} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Покладемо вартості перевезень від всіх пунктів відправлення до фіктивного пункту призначення $B_\text{ф}$ рівними 0, тобто $c_{i\text{ф}} = 0 \left(i = \overline{1,m}\right)$.

За фізичним змістом $x_{i\text{ф}}$ – означає кількість вантажу, який залишається невідправленим з i-го пункту відправлення.

Висновок: за рахунок фіктивного пункту призначення $B_\text{ф}$ із заявкою $b_\text{ф}$, всі нерівності-обмеження у транспортній задачі із надмірністю запасів перетворено у рівняння-обмеження, тобто задача зведена до класичної транспортної задачі із правильним балансом.

10.1.2. Транспортна задача із надмірністю запасів

У цьому випадку виконується нерівність (10.3):

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

тобто запасів недостатньо для задоволення усіх заявок. Необхідно скласти план таких перевезень, при якому усі запаси будуть вивезені і при цьому вартість перевезень буде мінімальною. Для розв‘язання введемо фіктивний пункт відправлення $A_\text{ф}$, із фіктивним уявним запасом $a_\text{ф}$,який дорівнює саме тій кількості вантажу, якої не вистачає для задоволення усіх заявок

$$a_\text{ф} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i .$$

При цьому покладемо, що усі вартості перевезень із фіктивного пункту відправлення, до будь якого пункту призначення, дорівнюють 0:

$$c_{\text{Ф}j} = 0 \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Складові плану перевезень $x_{\text{Ф}_j}$ $(j = \overline{1,n})$ показують величину недопостачання вантажу у відповідний пункт призначення.

Висновок: за допомогою використання фіктивного пункту відправлення, транспортну задачу, з надмірністю заявок,зведено до транспортної задачі із правильним балансом.

Зауваження 10.1. Окрім прийому зведення транспортної задачі із неправильним балансом до транспортної задачі із правильним балансом за допомогою фіктивних пунктів відправлень та пунктів прийому, можливо використати умови «нормування», наприклад домножити усі заявки на коефіцієнт

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{m} a_i}{\sum_{j=1}^{n} b_j}$$

для транспортної задачі із надмірністю заявок або на коефіцієнт

$$k = \frac{\sum_{j=1}^{n} b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i}$$

для транспортних задач із надмірністю запасів.

Приклад 10.1. Розв'язати транспортну задачу із надмірністю запасів (табл. 10.1).

Таблиця 10.1

Вихідні дані

ПВ	Пункти призначення				запаси	платежі
	B_1	B_2	B_3	$B_ф$	a_i	α_i
A_1	*5* 5 **18**	*7* 7 **21** -	*6* 6 **11** +	*1* *0*	50	$\alpha_1 = 0$
A_2	*4* *6*	*6* *6*	*5* 5 **22** Ц1 -	*0* *0* **18** +	40	$\alpha_2 = -1$
A_3	*4* *8*	*6* *4* +	*5* 5	*0* *0* **20** -	20	$\alpha_3 = -1$
b_j	18	21	33	38	110	
β_j	5	7	6	1		

❍Перевіряємо балансове співвідношення

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 = 50 + 40 + 20 = 110, \\ b_1 + b_2 + b_3 = 18 + 21 + 23 = 72, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} a_i > \sum_{j=1}^{3} b_j \ .$$

Має місце надмірність запасів.

Використовуємо фіктивний пункт призначення $B_ф$ із заявкою $b_ф = 110 - 72 = 38$. В результаті використання $B_ф$ вдалося перейти до транспортної задачі із правильним балансом.

Розв'язуємо класичну транспортну задачу методом потенціалів. Перевіряємо задачу на невиродженість:

$$r = n + m - 1 = 4 + 3 - 1 = 6\,.$$

Кількість ненульових базисних змінних, отриманих методом північно-західного кута дорівнює 6 і співпадає із r. Тобто транспортна задача є невиродженою. Виконаємо заміну базисних і вільних віконець за циклами Ц1 (див. табл. 10.1) , Ц2 (табл. 10.2) та Ц3 (табл. 10.3). Заповнимо відповідно таблиці: першого (див. табл. 10.2), другого (див. табл. 10.3) та третього (табл. 10.4) наближення.

Таблиця 10.2

Перше наближення

ПВ	Пункти призначення				Запаси	Платежі
	B_1	B_2	B_3	$B_ф$	a_i	α_i
A_1	*5* 5 ***18***	*7* 7 ***1***	*6* 6 ***31*** -	*1* 0 +	50	$\alpha_1 = 0$
A_2	*4* 6	*6* 6	*5* Ц2 5 ***2*** +	*0* 0 ***38*** -	40	$\alpha_2 = -1$
A_3	*2* 8	*4* 4 ***20***	*3* 5	*-2* 0	20	$\alpha_3 = -3$
b_j	18	21	33	38	110	
β_j	5	7	6	1		

Таблиця 10.3

Друге наближення

ПВ	Пункти призначення				Запаси	Платежі
	B_1	B_2	B_3	$B_ф$	a_i	α_i
A_1	*5* 5 ***18***	*7* 7 ***1*** -	*5* 6	*0* 0 ***31*** +	50	$\alpha_1 = 0$
A_2	*5* 6	*7* + 6	*5* Ц3 5 ***33***	*0* - 0 ***7***	40	$\alpha_2 = 0$
A_3	*2* 8	*4* 4 ***20***	*2* 5	*-3* 0	20	$\alpha_3 = -3$
b_j	18	21	33	38	110	
β_j	5	7	5	0		

Висновок:

1) Третє наближення дає оптимальний план, із якого випливає, що $W_{min} = 341$.

2) У пункті відправлення A_1 залишилось невідправлених 32, у A_2 – 6, а в A_3 – 0.

Таблиця 10.4

Третє наближення

ПВ	Пункти призначення				Запаси	Платежі
	B_1	B_2	B_3	$B_ф$	a_i	α_i
A_1	***5*** 5 ***18***	*6* *7*	*5* *6*	***0*** *0* ***32***	50	$\alpha_1 = 0$
A_2	*5* *6*	***6*** *6* ***1***	***5*** *5* ***33***	***0*** *0* ***6***	40	$\alpha_2 = 0$
A_3	*3* *8*	***4*** *4* ***20***	*3* *5*	*-2* *0*	20	$\alpha_3 = -2$
b_j	18	21	33	38	110	
β_j	5	6	5	0		

●

10.2. Розв’язок транспортної задачі за критерієм часу

Досі транспортна задача ставилась як задача, у якій необхідно було мінімізувати вартість перевезень. Але в багатьох випадках практики важливу роль відіграє тривалість часу T, протягом якого усі перевезення буде завершено. Так, наприклад: при ліквідації наслідків надзвичайних ситуацій необхідно мінімізувати як час надходження інформації про стихійне лихо, так і час до надання допомоги; при багатопроцесорній обробці інформації необхідно розподілити обчислювальні ресурси, щоб мінімізувати тривалість обчислень.

Найкращим слід вважати такий план перевезень $\left(x_{ij}\right)$, при якому час закінчення усіх перевезень мінімізується

$$T \to \min_{\substack{x_{ij} \ge 0 \\ i=\overline{1,m}\ ,\ j=\overline{1,n}}} . \tag{10.6}$$

Транспортна задача, у якій оптимальним вважається план із мінімальним часом усіх перевезень, носить назву *транспортна задача за критерієм часу*.

Математична постановка транспортної задачі за критерієм часу стосовно балансових обмежень виконується так само, як і класична транспортна задача, із тією різницею, що критерій, тобто показник ефективності, має вигляд:

$$T = \max t_i \to \min_{x_{ij} > 0} \tag{10.7}$$

і виконуються балансові обмеження:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ (j = \overline{1,n}), \tag{10.8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i = \overline{1,m}). \tag{10.9}$$

Зауваження 10.2. Використання строгого обмеження $x_{ij} > 0$ показує, що максимальний інтервал часу обирається не взагалі, а лише з тих віконець транспортної таблиці, в яких перевезення строго більше нуля (строго додатні, тобто реально виконуються). Для розв'язку транспортної задачі за критерієм часу теж зручно використовувати транспортну таблицю, у якій в правому верхньому куті буде записано t_{ij} – час перевезення вантажу із пункту відправлення i в пункт призначення j (замість c_{ij}).

Загалом транспортна задача за критерієм часу не відноситься до задач лінійного програмування тому, що показник ефективності T є нелінійною функцією змінних x_{ij}. Але зручна форма транспортної таблиці, яка використовується для розв'язку класичної транспортної задачі, дозволяє виконати обчислення без порушень балансових обмежень, тобто побудувати алгоритм, який ґрунтується на використанні допустимого плану.

Метод обчислень, що мінімізує час перевезень T, побудований із використанням транспортної таблиці і технології циклічних перенесень, які дозволяють не порушити балансові обмеження, отримав назву *методу заборонених віконець*. "Забороненими" вважаються віконця без перевезень і при цьому із найбільшим часом перевезень t_{ij}. "Заборона" вказує, із якого допустимого віконця потрібно "виштовхнути" перевезення в інше віконце із меншим часом перевезень. Покращення плану перевезень припиняється тоді, коли найбільший час перевезень вже зменшити неможливо. Ознака: всі віконця заблоковані перевезеннями або заборонені до перевезень.

Приклад 10.2. Вихідні дані транспортної задачі представлені у таблиці 10.5. Необхідно мінімізувати час перевезень.

❍ 1.Викреслюємо віконця із координатами $(1,1)$, $(2,5)$, $(4,1)$ та $(4,5)$, як віконця із значним часом перевезень.

2. Будь-яким способом заповнюємо транспортну таблицю допустимим планом.

1) Якщо транспортну таблицю заповнити будь-яким планом не звертаючи уваги на баланс записів та заявок, але лише виконувати умову невід'ємності перевезень, то отримаємо план перевезень.

2)Якщо транспортну таблицю, додатково до невід'ємності, заповнити такими значеннями x_{ij}, які враховують умови виконання балансу записів та заявок, то отримаємо допустимий план перевезень.
3) Якщо вимоги п.2. доповнити вимогою додатності $r = m + n - 1$ базових перевезень та нульовими перевезеннями в інших віконцях таблиці, то отримаємо опорний план перевезення.

Таблиця 10.5

Вихідні дані

ПВ	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	*10*	*8*	*5* **25**	*6*	*7*	25
A_2	*5* **21** -	*6* Ц1 +	*6* **2**	*6* **11**	*9*	34
A_3	*4* +	*8* **14** -	*7* **13**	*8*	*5* **15**	42
A_4	*11*	*4* **23**	*5*	*8*	*9*	23
b_j	21	37	40	11	15	124

Підкреслимо ще раз, що *оптимальний план перевезень для транспортної задачі за критерієм вартості* досягається лише на опорному плані. Для транспортної задачі за критерієм часу оптимальний план перевезень не обов'язково досягається на опорному, він може досягатися на будь-якому допустимому плані перевезень. Виконаємо перенесення перевезень за циклами Ц1 (табл. 10.6) та Ц2 (табл. 10.7).

Таблиця 10.6

Перша ітерація

ПВ	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	*10*	*8*	*5* **25** -	*6*	*5* +	25
A_2	*7* **7** -	*6* **14**	*6* **2** +	Ц2 *6* **11**	*9*	34
A_3	*4* **14** +	*8*	*7* **13**	*8*	*5* **15** -	42
A_4	*11*	*4* **23** -	*5* +	*8*	*9*	23
b_j	21	37	40	11	15	124

Таблиця 10.7

Друга ітерація

ПВ	Пункти призначення					запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	*10*	*8*	*5* **18**	*6*	*5* **7**	25
A_2	*5*	*6* **14**	*6* **9**	*6* **11**	*9*	34
A_3	*4* **21**	*8*	**5** **13**	*8*	*5* **8**	42
A_4	*11*	*4* **23**	*5*	*8*	*9*	23
b_j	21	37	40	11	15	124

Отже, $T_{min} = 6$. ●

Приклад 10.3. Скласти план перевезень, якщо вихідні дані транспортної задачі задані таблицею 10.8.

Таблиця 10.8

Вихідні дані

ПВ	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	1 15	3 5	4	2	5	20
A_2	5	2 15	3 15	1	2	30
A_3	8	7	6 10	10	4 25	35
A_4	3	4	3	6 25	5 15	40
b_j	15	20	25	25	40	125

Остаточний результат

Таблиця 10.9

ПВ	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	1 10	3	4	2 10	5	20
A_2	5	2 10	3	1 15	2 5	30
A_3	8	7	6	10	4 35	35
A_4	3 5	4 10	3 25	6	5	40
b_j	15	20	25	25	40	125

Отже, $T_{min} = 4$. ●