

## Лекція 9. Метод потенціалів розв'язання транспортної задачі

### 9.1. Обґрунтування методу потенціалів

Розглянутий у лекції 9 розподільчий метод розв'язання транспортної задачі має суттєвий недолік: необхідно знаходити цикли для всіх вільних віконць і обчислювати їх вартість. Для зменшення кількості обчислень за рахунок обчислення вартості лише тих циклів, де ця вартість від'ємна запропоновано *метод потенціалів*.

Ідея методу полягає в наступному. Припустимо, що задана транспортна задача у вигляді

$$W = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}) \quad (9.1)$$

за умови

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \end{cases} \quad (9.2)$$

при цьому

$$\sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^m a_i. \quad (9.3)$$

Уявимо, що кожен з пунктів відправлення  $A_i$  та призначення (прийому)  $B_j$  сплачують певні кошти у розмірі відповідно  $\alpha_i$  та  $\beta_j$ . Позначимо суму коштів  $\alpha_i + \beta_j = \widetilde{c}_{ij}$ .

Підкреслимо, що  $\alpha_i, \beta_j, \widetilde{c}_{ij}$  – уявні абстрактні вартості і платежі, тобто вони можуть бути як додатними, так і від'ємними або нульовими. Для скорочення запису позначимо всю сукупність платежів  $(\alpha_i, \beta_j)$ . Тоді матриця псевдовартостей матиме вигляд:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{c}_{11} = \alpha_1 + \beta_1 & \widetilde{c}_{12} = \alpha_1 + \beta_2 & \dots & \widetilde{c}_{1n} = \alpha_1 + \beta_n \\ \widetilde{c}_{21} = \alpha_2 + \beta_1 & \widetilde{c}_{22} = \alpha_2 + \beta_2 & \dots & \widetilde{c}_{2n} = \alpha_2 + \beta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \widetilde{c}_{m1} = \alpha_m + \beta_1 & \widetilde{c}_{m2} = \alpha_m + \beta_2 & \dots & \widetilde{c}_{mn} = \alpha_m + \beta_n \end{bmatrix}.$$

Доведемо теорему про платежі.

#### Теорема 9.1.

Для заданої сукупності платежів  $(\alpha_i, \beta_j)$ , загальна псевдовартість перевезень не залежить від плану перевезень, а за-

лежить лише від сукупності платежів

$$\widetilde{W} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \widetilde{c}_{ij} x_{ij}.$$

► Розглянемо вираз для обчислення псевдо вартості:

$$\begin{aligned} \widetilde{W} &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \widetilde{c}_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\alpha_i + \beta_j) x_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\alpha_i) x_{ij} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\beta_j) x_{ij} = \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{j=1}^n x_{ij} + \sum_{j=1}^n \beta_j \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^n \beta_j b_j. \end{aligned}$$

Як бачимо загальна псевдовартість перевезень не залежить від допустимого плану перевезень, тобто такого плану, що задовольняє системі балансових обмежень і умов  $x_{ij} \geq 0$ , а залежить лише від запасів  $a_i$ , заявок  $b_j$  та платежів  $(\alpha_i, \beta_j)$ , що і треба було довести ◀

З'ясуємо зв'язок між псевдовартістю  $\widetilde{c}_{ij}$  перевезення та її істинним значенням. Припустимо, що план перевезень  $(x_{ij})$  невироджений: кількість базисних віконць з додатними перевезеннями у таблиці перевезень дорівнює  $m + n - 1$ . Покладемо, що в усіх базисних віконцях псевдовартості дорівнюють істинним вартостям

$$\widetilde{c}_{ij} = \alpha_i + \beta_j = c_{ij} \quad \forall x_{ij} > 0.$$

У вільних віконцях  $x_{ij} = 0$  і при цьому співвідношення між  $\widetilde{c}_{ij}$  та  $c_{ij}$  будь-яке. Це співвідношення є індикатором (показником) того, чи є план перевезень, якому відповідає дана таблиця оптимальним, чи його можливо покращити.

Доведемо теорему.

**Теорема 9.2.**

Якщо для всіх базисних віконць допустимого плану  $\widetilde{c}_{ij} = c_{ij}$ , а для всіх вільних віконць допустимого плану  $\widetilde{c}_{ij} \leq c_{ij}$ , то план є оптимальним.

Нагадаємо, що для базисних віконць перевезення повинні бути додатними, а для вільних віконць  $x_{ij} = 0$ .

► Визначимо вартість плану  $(x_{ij})$  заданого умовами даної теореми та з урахуванням "теореми про платежі":

$$W = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \widetilde{c}_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^n \beta_j b_j = const.$$

Виконаємо заміну плану  $(x_{ij}) \rightarrow (x_{ij}^*)$ , в якому змінимо частково або повністю склад вільних або базисних змінних, але співвідношення між елементами матриці істинних вартостей та псевдовартостей залишилось незмінним, тобто таким, що відповідає умовам теореми. Це означає, що для базисних змінних  $(x_{ij}^*)$ , які теж були базисними у плані  $(x_{ij})$  виконується умова  $\widetilde{c}_{ij} = c_{ij}$ , а для інших базисних змінних з плану виконується умова  $\widetilde{c}_{ij} \geq c_{ij}$ .

В результаті отримуємо вираз для обчислення загальної вартості перевезень при новому плані  $(x_{ij}^*)$ :

$$W^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^* \geq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \widetilde{c}_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^n \beta_j b_j = \text{const},$$

що і треба було довести. ◀

### Зауваження 9.1.

Ніякими змінами плану перевезень їх підсумкова вартість не може бути зменшена.

Прокоментуємо на прикладі зміст доведеної теореми. Припустимо, що  $m = n = 3$ . Тоді кількість базисних віконць повинні дорівнювати  $m + n - 1 = 5$ . Загальна вартість  $W$  при виконанні умов теореми обчислюється за формулою:

$$\begin{aligned} \widetilde{W} &= \begin{bmatrix} \widetilde{c}_{11} & \widetilde{c}_{12} & \widetilde{c}_{13} \\ \widetilde{c}_{21} & \widetilde{c}_{22} & \widetilde{c}_{23} \\ \widetilde{c}_{31} & \widetilde{c}_{32} & \widetilde{c}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 \\ 0 & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \widetilde{c}_{11} & \widetilde{c}_{12} & \widetilde{c}_{13} \\ \widetilde{c}_{21} & \widetilde{c}_{22} & \widetilde{c}_{23} \\ \widetilde{c}_{31} & \widetilde{c}_{32} & \widetilde{c}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & 0 & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & 0 \\ 0 & x_{23} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + c_{31}x_{31}. \end{aligned}$$

Припустимо, що план змінено, обчислимо вартість зміненого плану:

$$\begin{aligned} W^* &= \begin{bmatrix} \widetilde{c}_{11} & \widetilde{c}_{12} & \widetilde{c}_{13} \\ \widetilde{c}_{21} & \widetilde{c}_{22} & \widetilde{c}_{23} \\ \widetilde{c}_{31} & \widetilde{c}_{32} & \widetilde{c}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & x_{21}^* & 0 \\ x_{12}^* & 0 & 0 \\ x_{13}^* & x_{23}^* & x_{33}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \widetilde{c}_{12}x_{12}^* + \widetilde{c}_{31}x_{31}^* + \widetilde{c}_{21}x_{21}^* + \widetilde{c}_{23}x_{23}^* + \widetilde{c}_{33}x_{33}^* \geq \\ &\geq c_{12}x_{12}^* + c_{31}x_{31}^* + c_{21}x_{21}^* + c_{23}x_{23}^* + c_{33}x_{33}^*. \end{aligned}$$

Доведена теорема виконується і для виродженого плану. Таким чином доведено, що ознакою оптимальності плану перевезень є виконання двох умов:

1.  $\widetilde{c}_{ij} = c_{ij}$  для всіх базисних віконць;

2.  $\tilde{c}_{ij} \leq c_{ij}$  для всіх вільних віконць.

План для якого виконуються властивості 1 та 2 носить назву *потенціального*, а платежі, що йому відповідають  $(\alpha_i, \beta_j)$  носять назву *потенціалів пунктів*  $A_i$  та  $B_j$ .

Використовуючи вищезначені терміни, можливо переформулювати теорему коротше: будь-який потенціальний план є оптимальним.

## 9.2. Побудова потенціального плану

Для розв'язання транспортної задачі необхідно побудувати потенціальний план. Цей план можливо побудувати за рахунок послідовних наближень від початкового плану, знайденого, наприклад, методом північно-західного кута. Існує властивість платежів та псевдовартостей, яка полягає в наступному: якою не була б система платежів  $(\alpha_i, \beta_j)$ , що задовольняє умові  $\tilde{c}_{ij} = c_{ij}$  для всіх базисних віконць, для кожного вільного віконця ціна циклу перерахунку дорівнює різниці між вартістю  $c_{ij}$  та псевдовартістю  $\tilde{c}_{ij}$ , що відноситься до даного віконця.

### Приклад 9.1.

Розглянемо транспортну задачу, не проставляючи запасів і заявок, наприклад, для випадку  $m = 5$ ,  $n = 6$  (табл.9.1)

Таблиця 9.1.

### Приклад циклу перерахунку

ПВ	Пункти призначення					
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$
$A_1$	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$	$c_{14}$	$c_{15}$	$c_{16}$
$A_2$	$c_{21}$	$c_{22}$	$c_{23}$	$c_{24}$	$c_{25}$	$c_{26}$
$A_3$	$c_{31}$	$c_{32}$	$c_{33}$	$c_{34}$	$c_{35}$	$c_{36}$
$A_4$	$c_{41}$	$c_{42}$	$c_{43}$	$c_{44}$	$c_{45}$	$c_{46}$
$A_5$	$c_{51}$	$c_{52}$	$c_{53}$	$c_{54}$	$c_{55}$	$c_{56}$

○ Знайдемо

$$r = n + m - 1 = 5 + 6 - 1 = 10.$$

В таблиці для прикладу заштриховано 10 базисних віконць. Обираємо будь-яке вільне віконце, наприклад,  $(1, 5)$  і будуємо цикл перерахунку так, щоб додатна вершина перебувала у цьому віконці, а всі інші в базисних. Ціна визначеного циклу дорівнює:

$$V_{15} = c_{15} - c_{35} + c_{33} - c_{23} + c_{22} - c_{12}.$$

Зважаючи на те, що для всіх базисних клітинок псевдовартості дорівнюють вартостям:

$$\begin{aligned} V_{15} &= c_{15} - (\alpha_3 + \beta_5) + (\alpha_3 + \beta_3) - (\alpha_2 + \beta_3) + (\alpha_2 + \beta_2) - (\alpha_1 + \beta_2) = \\ &= c_{15} - (\alpha_1 + \beta_5) = c_{15} - c_{15}. \bullet \end{aligned}$$

**Висновок:** при використанні методу потенціалів для розв'язання транспортної задачі немає необхідності знаходити цикли із від'ємною ціною, що є найбільш трудомісткою процедурою розподільчого методу.

**Методика розв'язання транспортної задачі методом потенціалів полягає в наступному:**

1. Виконати перше наближення до оптимального плану, наприклад, за допомогою метода північно-західного кута. Перевірити задачу на невиродженість, тобто обчислити кількість базисних клітинок, перевезення в яких повинні бути додатними. Якщо перше наближення продемонструвало виродженість транспортної задачі (кількість вільних віконць з нульовими перевезеннями перевищує  $m \cdot n - (m + n - 1)$ ), необхідно застосувати метод збурення заявок та запасів і перейти до не виродженої задачі.
2. Визначити для плану першого наближення платежі, виходячи із умови, що в будь-якому базисному віконці псевдовартості дорівнюють вартостям  $\tilde{c}_{ij} = \alpha_i + \beta_j = c_{ij}$ . Всього записаних вище рівнянь буде  $r = m + n - 1$ , а невідомих, що входять до їх складу  $\alpha_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) та  $\beta_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) -  $m + n$ . Тобто одну з невідомих можливо для простоти покласти нульовою, а всі інші обчислити так, щоб виконувалось записане вище рівняння.
3. Обчислити псевдовартості для всіх вільних віконць. Якщо виявляється, що псевдовартості вільних віконць не перевищують вартості цих віконць, то оптимальний план знайдено.
4. Якщо хоча б у одному з вільних віконць псевдовартість перевищує вартість  $\tilde{c}_{ij} > c_{ij}$ , то потрібно покращити план перевезень за рахунок переміщення перевезень за циклом, який відповідає обраному вільному віконцю із від'ємною різницею  $0 > \tilde{c}_{ij} - c_{ij}$ .
5. Знову обчислити платежі та псевдовартості. Перерахунки завершуються лише тоді, коли буде знайдено оптимальний план.

**Зауваження 9.2.**

Поняття платежів, вартостей, псевдоплатежів, псевдовартостей, мають наглядну економічну інтерпретацію: ком-

панії групи  $A$ , які зберігають товари, та компанії групи  $B$ , що накопичують та реалізують товари, разом фінансують перевезення. Оптимальним є той план, коли компанії  $A$  та  $B$  за ці перевезення не переплачують.

### 9.3. Приклади розв'язання транспортної задачі методом потенціалів

#### Приклад 9.2.

Розв'язати транспортну задачу, задану таблицею 9.2.

Таблиця 9.2

#### Вихідні дані

ПВ	Пункти призначення					Запаси	Платежі	
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$			$a_i$
$A_1$	10 17	10 8	8 6	9 3	6 4	4 5	25	$\alpha_1 = 0$
$A_2$	8 +	5 -	6 13	6 19	4 3	3 2	8	$\alpha_2 = -2$
$A_3$	9 9	7 7	5 22	5 14	4 4	3 3	40	$\alpha_3 = -1$
$A_4$	14 14	12 10	10 8	9 8	8 20	8	20	$\alpha_4 = 4$
$b_j$	17	21	41	14	24	117		
Платежі $\beta_j$	10	8	6	5	4			

○ Знайдемо методом північно-західного кута перше наближення до оптимального плану (див. табл. 9.2). Кількість ненульових віконць дорівнює 8, що співпадає із контрольним числом

$$r = m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8.$$

Висновок – транспортна задача не вироджена.

Додамо до транспортної таблиці рядок та стовпець платежів відповідно  $\beta_j$  та  $\alpha_i$ . Псевдовартості запишемо зліва зверху у кожному віконці.

Враховуючи, що для базисних віконць  $\tilde{c}_{ij} = \alpha_i + \beta_j$ , знаходимо  $\tilde{c}_{11} = c_{11} = 10 = 0 + \beta_1$  (за припущенням  $\alpha_1 = 0$ ), тобто  $\beta_1 = 10$ . Аналогічно знаходимо  $\beta_2 = 8$ . Далі  $\alpha_2 + \beta_2 = 6 \rightarrow \alpha_2 = -2$  тощо. Виконаємо перерахунок базисного віконця за циклом Ц1 (див. табл. 9.2). Перенесемо за цим циклом 13 одиниць вантажу (більше неможливо, інакше у віконці (2,2) виникне від'ємне число і план не буде допустимим) і зменшимо вартість плану на  $13 \cdot 3 = 39$ .

Не всі псевдовартості у вільних віконцях (табл. 9.3) задовольняють умові  $\tilde{c}_{ij} \leq c_{ij}$ . Тому, план, наведений у таблиці першої ітерації не є оптимальним. Спробуємо покращити цей план шляхом переведення у базисні змінні одну з вільних змінних, для якої у відповідному віконці  $\tilde{c}_{ij} > c_{ij}$ , наприклад, у віконці (1,4). Ціна циклу для віконця (1,4) дорівнює  $v_{14} = 6 - 8 = -2$ .

Таблиця 9.3

## Перша ітерація

ПВ	Пункти призначення					запаси	платежі
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$		
$A_1$	<b>10</b> 10 <b>4</b> -	<b>8</b> 8 <b>21</b> -	9 9	8 6 +	7 5	25	$\alpha_1 = 0$
$A_2$	<b>5</b> 5 <b>13</b> +	6 6	<b>4 Ц2</b> 4 <b>19</b> -	3 3	2 8	32	$\alpha_2 = -5$
$A_3$	6 9	4 7	<b>5</b> 5 <b>22</b> +	<b>4</b> 4 <b>14</b> -	<b>3</b> 3 <b>4</b>	40	$\alpha_3 = -4$
$A_4$	11 14	9 10	10 8	9 8	<b>8</b> 8 <b>20</b>	20	$\alpha_4 = 1$
$b_j$	17	21	41	14	24	117	
$\beta_j$	10	8	9	8	7		

Перенесемо по циклу Ц2 (див. табл. 9.3) 4 одиниці і занесемо результат у таблицю другої ітерації (табл. 9.4).

Таблиця 9.4

## Друга ітерація

ПВ	Пункти призначення					Запаси	платежі
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$		
$A_1$	8 10 <b>8</b> 8 <b>21</b>	7 9	<b>6</b> 6 <b>4</b>	5 5	25	$\alpha_1 = 0$	
$A_2$	<b>5</b> 5 <b>17</b>	5 6	<b>4</b> 4 <b>15</b>	3 3	2 8	32	$\alpha_2 = -3$
$A_3$	6 9	6 7	<b>5</b> 5 <b>26</b> -	<b>4</b> 4 <b>10</b> -	<b>3</b> 3 <b>4</b> +	40	$\alpha_3 = -2$
$A_4$	11 14	11 10	10 8 +	9 <b>Ц3</b> 8 -	<b>8</b> 8 <b>20</b> -	20	$\alpha_4 = 3$
$b_j$	17	21	41	14	24	117	
$\beta_j$	8	8	7	6	5		

План другої ітерації теж не оптимальний. Обираємо віконце (4,3) і переносимо 20 одиниць перевезень по циклу Ц3. Остаточо отримаємо таблицю третьої ітерації (табл. 9.5), яка за всіма ознаками надає оптимальний план перевезень (усі псевдовартості не перевищують відповідних вартостей).

Значення показника ефективності дорівнює:

$$W = 21 \cdot 8 + 4 \cdot 6 + 17 \cdot 5 + 15 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 10 \cdot 4 + 24 \cdot 3 + 20 \cdot 8 = 639.$$

Таблиця 9.5

## Третя ітерація

ПВ	Пункти призначення										Запаси	платежі
	B <sub>1</sub>		B <sub>2</sub>		B <sub>3</sub>		B <sub>4</sub>		B <sub>5</sub>			
A <sub>1</sub>	8	10	<b>8</b>	8	7	9	<b>6</b>	6	5	5	25	α <sub>1</sub> = 0
A <sub>2</sub>	<b>5</b>	5	5	6	<b>4</b>	4	3	3	2	8	32	α <sub>2</sub> = -3
A <sub>3</sub>	6	9	6	7	<b>5</b>	5	<b>4</b>	4	<b>3</b>	3	40	α <sub>3</sub> = -2
A <sub>4</sub>	9	14	9	10	<b>8</b>	8	7	8	6	8	20	α <sub>4</sub> = 1
b <sub>j</sub>	17		21		41		14		24		117	
β <sub>j</sub>	8		8		7		6		5			

Таким чином, фірма, яка володіє усіма складами  $A$  та всіма пунктами реалізації  $B$ , але не включає до свого складу перевізників, має заплатити мінімальну суму  $W_{min} = 639$ . Платежі  $\alpha_i$  та  $\beta_j$  мають умовний зміст і використані як математична абстракція. ●

**Приклад 9.3.**

Розв'язати методом потенціалів вироджену транспортну задачу. Умови транспортної задачі задані вихідною транспортною таблицею 9.6,  $m = 3$ ,  $n = 3$ .

Таблиця 9.6

## Вихідні дані

ПВ	Пункти призначення						запаси	платежі
	B <sub>1</sub>		B <sub>2</sub>		B <sub>3</sub>			
A <sub>1</sub>	<b>6</b>	6	<b>4</b>	4	3	2	20 + ε	α <sub>1</sub> = 0
A <sub>2</sub>	7	3	<b>5</b>	5	<b>4</b>	4	25 + ε	α <sub>2</sub> = 1
A <sub>3</sub>	6	3	4	6	<b>3</b>	3	30 - 2ε	α <sub>3</sub> = 0
b <sub>j</sub>	20		25		30		75	
β <sub>j</sub>	6		4		3			

○ Перевіримо:  $r = m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5 > 3$  – транспортна задача вироджена. Скористаємось методом збурення запасів та заявок (див. табл. 9.6).

Перерахунок за циклом Ц1 дозволяє заповнити таблицю першої ітерації (табл. 9.7), а за циклом Ц2 – таблицю другої ітерації (табл. 9.8).

Таблиця 9.7

## Перша ітерація

ПВ	Пункти призначення			Запаси	Платежі
	$B_1$	$B_2$	$B_3$		
$A_1$	2      6	<b>4</b> 4 $20+\epsilon$ -	<del>3</del> 2 <b>Ц2</b> +	$20 + \epsilon$	$\alpha_1 = 0$
$A_2$	<b>3</b> 3 <b>20</b>	<b>5</b> 5 $5-\epsilon$ +	<del>4</del> 4 <b>2</b> $\epsilon$ -	$25 + \epsilon$	$\alpha_2 = 1$
$A_3$	2      3	4      6	<b>3</b> 3 $30-2\epsilon$	$30 - 2\epsilon$	$\alpha_3 = 0$
$b_j$	20	25	30	75	
$\beta_j$	2	4	3		

Таблиця 9.8

## Друга ітерація

ПВ	Пункти призначення			Запаси	Платежі
	$B_1$	$B_2$	$B_3$		
$A_1$	2      6	<b>4</b> 4 $20+\epsilon$	<b>2</b> 2 $2\epsilon$	$20 + \epsilon$	$\alpha_1 = 0$
$A_2$	<b>3</b> 3 <b>20</b>	<b>5</b> 5 $5+\epsilon$	3      4	$25 + \epsilon$	$\alpha_2 = 1$
$A_3$	3      3	5      6	<b>3</b> 3 $30-2\epsilon$	$30 - 2\epsilon$	$\alpha_3 = 1$
$b_j$	20	25	30	75	
$\beta_j$	2	4	2		

$$W_{\min}|_{\epsilon=0} = 20 \cdot 4 + 20 \cdot 3 + 5 \cdot 5 + 30 \cdot 3 = 255$$

Підкреслимо, що у виродженій транспортній задачі при виборі Ц1 або Ц2 із іншими вільними віконцями остаточний, тобто оптимальний, план зміниться, але мінімальне значення показника ефективності залишиться незмінним:  $W = 255$ . ●

**Висновок:** особливістю вироджених транспортних задач є те, що однакові мінімальні значення показника ефективності можуть досягатися на декількох різних планах. Тобто, для "вироджених" транспортних задач характерною ознакою є неоднозначність розв'язку.